

計算メモ：光の反射

服部修平

2026年1月28日

0 はじめに

光が媒質の境界面へ斜めに入射すると、反射光が偏光になる現象、さらに、Brewster角（反射光と透過光の射線が互いに垂直になるような入射角）において直線偏光になるという性質は、どのような仕組みで生じるのだったかな？と思ったので、計算練習を兼ね、光の反射に関する式をすべて導出してみた。そのメモを残す。

少しだけ説明をしておく。Brewster角で直線偏光になるというのは電場が境界面に平行な成分（s成分）だけになるのであるが、ということは、磁場は境界面に垂直な入射面内の成分（p成分）だけになるということである。このことに関して、Maxwell方程式は電場と磁場について対称な形をしているのに、なぜ、電場のほうがs成分、磁場のほうがp成分と非対称になるのか、という疑問がかねてよりあった。それゆえに、この計算では、その理解を深めることを狙って、導出の過程を、数学的に電場と磁場の対称性が保たれるような操作で進められる限り進め、表記上も対称性が明確になるように記述した。結果として、数学的な構造の上では、やはり、電場と磁場は対称だ（どちらかがp成分・s成分などと限定はされない）ということがわかった。現実に電場がs成分、磁場がp成分の偏光になる理由は、現実の物質に透磁率の差がほとんどなく $\mu_{12} = 1$ とおくことにあるということが理解された。

以上の方針のためもあり、この文書では、「Brewster角」という用語を（ $\mu_{12} = 1$ でない場合を含めて）「TE波とTM波のそれぞれに関して、反射光の振幅が0になるような入射角」という意味で使っている。普通は、Brewster角とは「 $\mu_{12} = 1$ の場合にTM波の反射光の振幅が0になる入射角」のことをいうので、この文書中での「Brewster角」は普通とは意味が違っており、極端な言い方では誤用と言うこともできる。読む際には注意してほしい。

もう一つ断っておく。波の計算は複素表示 $e^{i\omega t}$ を用いるのが楽であるに決まっているのだが、より初步的な概念である実数の三角関数表示を用いても同じ結果が得られるはずなので、そのことを確認するのも貴重な資料となると思い、敢えて三角関数表示で行った。だから、全体を通して、普通の教科書の記述よりはかなり冗長である。おそらく倍以上の手数になっているであろう。とくにエヴァネッセント波の式を導出するところは、ほとんどが無駄な努力である。しかしこともまた、その冗長な考察のおかげで、論理的にどのような根拠でもってエヴァネッセント波の式を正しいと認めるのか、という基礎概念に気づく部分もあったので、無意味ではないと思っている。

トレーニングのために、基本的に教科書などを見ず自分で考えて計算した（だから「計算メモ」なのである）が、最後のGoos-Hänchenシフトの X_{GH} を導出する部分だけはさすがにわからなかったので、参考文献を読み、それに従った。

1 平面波を表す式

電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{H} 、電束密度 \mathbf{D} 、磁束密度 \mathbf{B} 、誘電率 ε 、透磁率 μ 。

Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = +\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

すなわち

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = +\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

光速を c とすると、平面波の直線偏光は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \quad (3)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \quad (4)$$

ここで

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(E_{0z} \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(E_{0y} \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \right) \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(E_{0x} \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(E_{0z} \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \right) \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(E_{0y} \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(E_{0x} \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \right) \right) \\ &= \left(-\frac{\omega}{c^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \cdot \left(E_{0z} \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) - E_{0y} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) \right) \right. \\ &\quad \left. -\frac{\omega}{c^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \cdot \left(E_{0x} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) - E_{0z} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) \right) \right. \\ &\quad \left. -\frac{\omega}{c^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \cdot \left(E_{0y} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) - E_{0x} \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) \right) \right) \\ &= \left(-\frac{\omega}{c^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \cdot \left(E_{0z} c_y - E_{0y} c_z \right) \right. \\ &\quad \left. -\frac{\omega}{c^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \cdot \left(E_{0x} c_z - E_{0z} c_x \right) \right. \\ &\quad \left. -\frac{\omega}{c^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \cdot \left(E_{0y} c_x - E_{0x} c_y \right) \right) \\ &= \left(\frac{\omega}{c^2} (E_{0y} c_z - E_{0z} c_y) \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \right. \\ &\quad \left. \frac{\omega}{c^2} (E_{0z} c_x - E_{0x} c_z) \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \right. \\ &\quad \left. \frac{\omega}{c^2} (E_{0x} c_y - E_{0y} c_x) \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \right) \end{aligned}$$

また

$$-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\mu \omega H_{0x} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \\ -\mu \omega H_{0y} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \\ -\mu \omega H_{0z} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{c^2} \right) + \delta \right] \end{pmatrix}$$

である。

これらと (1) 式より

$$\begin{pmatrix} H_{0x} \\ H_{0y} \\ H_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_{0z} c_y - E_{0y} c_z}{c^2 \mu} \\ \frac{E_{0x} c_z - E_{0z} c_x}{c^2 \mu} \\ \frac{E_{0y} c_x - E_{0x} c_y}{c^2 \mu} \end{pmatrix} \quad (5)$$

2 入射波・反射波・透過波

右手系の直交座標系をとる。入射面内に x 軸と z 軸をとり、入射面に垂直に y 軸をとる。入射波の進行方向が x の正の向きかつ z の正の向きとなるようにとる。媒質の境界は $z = 0$ の平面とする。

入射側の媒質中の誘電率・透磁率・光の速さをそれぞれ ϵ_1 、 μ_1 、 c_1 とし、透過側の媒質中の誘電率・透磁率・光の速さをそれぞれ ϵ_2 、 μ_2 、 c_2 とする。入射角を θ 、屈折角を ϕ とすれば、入射波の速度 \mathbf{c}_i 、反射波の速度 \mathbf{c}_r 透過波の速度 \mathbf{c}_t は、それぞれ

$$\mathbf{c}_i = \begin{pmatrix} c_1 \sin \theta \\ 0 \\ c_1 \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{c}_r = \begin{pmatrix} c_1 \sin \theta \\ 0 \\ -c_1 \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{c}_t = \begin{pmatrix} c_2 \sin \phi \\ 0 \\ c_2 \cos \phi \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる。

たとえば (6) 式を電場 (3) 式と磁場 (4) 式に適用すれば、入射波の電場は、入射波の $\delta = 0$ となるよう時間の原点を選んで

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}_i}{c_i^2} \right) \right] \\ &= \mathbf{E}_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c_1} \right) \right] \end{aligned}$$

と表せ、磁場は

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}_i}{c_i^2} \right) \right] \\ &= \mathbf{H}_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c_1} \right) \right] \end{aligned}$$

と表せる。

反射波と透過波についても、波の速度については (7) (8) 式を適用して同様に書き下せるのだが、 δ を TE 波と TM 波とで分けて扱わないと一般的な表現ができない。

3 p 成分と s 成分

入射波・反射波・透過波の電場の p 成分の振幅をそれぞれ E_{\parallel} 、 E'_{\parallel} 、 E''_{\parallel} とし、s 成分の振幅をそれぞれ E_{\perp} 、 E'_{\perp} 、 E''_{\perp} とする。入射波・反射波・透過波の磁場の p 成分の振幅をそれぞれ H_{\parallel} 、 H'_{\parallel} 、 H''_{\parallel} とし、s 成分の振幅をそれぞれ H_{\perp} 、 H'_{\perp} 、 H''_{\perp} とする。ただし、p 成分の振幅はいずれも x 成分の振幅と同じ符号とし、s 成分の振幅はいずれも y 成分の振幅と同じ符号とする。

すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{\parallel} \cos \theta \\ E_{\perp} \\ -E_{\parallel} \sin \theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} E'_{0x} \\ E'_{0y} \\ E'_{0z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E'_{\parallel} \cos \theta \\ E'_{\perp} \\ E'_{\parallel} \sin \theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} E''_{0x} \\ E''_{0y} \\ E''_{0z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E''_{\parallel} \cos \phi \\ E''_{\perp} \\ -E''_{\parallel} \sin \phi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} H_{0x} \\ H_{0y} \\ H_{0z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H_{\parallel} \cos \theta \\ H_{\perp} \\ -H_{\parallel} \sin \theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} H'_{0x} \\ H'_{0y} \\ H'_{0z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H'_{\parallel} \cos \theta \\ H'_{\perp} \\ H'_{\parallel} \sin \theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} H''_{0x} \\ H''_{0y} \\ H''_{0z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H''_{\parallel} \cos \phi \\ H''_{\perp} \\ -H''_{\parallel} \sin \phi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

である。

電場の振幅と磁場の振幅の関係 (5) 式に対して、入射波・反射波・透過波の速度として (6) (7) (8) 式を使い、電場と磁場の $x \cdot y \cdot z$ 成分の振幅として (9) 式を使えば、入射波・反射波・透過波のそれぞれについての「p・s 成分に関する電場の振幅と磁場の振幅の関係」

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\parallel} = -\frac{E_{\perp}}{c_1 \mu_1} \quad H'_{\parallel} = \frac{E'_{\perp}}{c_1 \mu_1} \quad H''_{\parallel} = -\frac{E''_{\perp}}{c_2 \mu_2} \\ H_{\perp} = \frac{E_{\parallel}}{c_1 \mu_1} \quad H'_{\perp} = -\frac{E'_{\parallel}}{c_1 \mu_1} \quad H''_{\perp} = \frac{E''_{\parallel}}{c_2 \mu_2} \end{array} \right\} \tag{10}$$

が得られる。

4 TE 波と TM 波

TE 波は電場を s 成分しか持たない波で、 $E_{\parallel} = 0$ である。すると (10) 式より H_{\perp} も 0 であるから、 E_{0x} 、 E_{0z} 、 H_{0y} が 0 である。反射波・透過波も同様である。つまり、電場の $x \cdot z$ 成分と磁場の y 成分は TE 波とはつねに無関係である。

TM 波は磁場を s 成分しか持たない波で、 $H_{\parallel} = 0$ である。すると (10) 式より E_{\perp} も 0 であるから、 E_{0y} 、 H_{0x} 、 H_{0z} が 0 である。反射波・透過波も同様である。つまり、電場の y 成分と磁場の $x \cdot z$ 成分は TM 波とはつねに無関係である。

よって、電場・磁場に関するすべての式は

- 電場の y 成分・磁場の x 成分・磁場の z 成分 は TE 波
- 電場の x 成分・電場の z 成分・磁場の y 成分 は TM 波

と完全に分離され、議論は TE 波と TM 波に対して別個に行われることになる。

このことにもとづき、TE 波と TM 波それぞれの電場と磁場の式を書き並べる。

入射波の電場・磁場を $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ 、反射波のを $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}'$ 、透過波のを $\mathbf{E}'' \cdot \mathbf{H}''$ とする。(3) (4) 式に波の速度として(6) (7) (8) 式を適用し、振幅として(9)式を適用する。TE 波の反射波・透過波の δ をそれぞれ $\delta'_E \cdot \delta''_E$ とし、TM 波の反射波・透過波の δ をそれぞれ $\delta'_M \cdot \delta''_M$ とする。TE 波・TM 波のそれぞれについて、入射波の δ が 0 となるように時間の原点をとる。

結果は

TE 波

$$\left. \begin{aligned} E_y &= E_{\perp} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c_1} \right) \right] \\ H_x &= H_{\parallel} \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c_1} \right) \right] \\ H_z &= -H_{\parallel} \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c_1} \right) \right] \\ E_y' &= E_{\perp}' \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c_1} \right) + \delta'_E \right] \\ H_x' &= H_{\parallel}' \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c_1} \right) + \delta'_E \right] \\ H_z' &= H_{\parallel}' \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c_1} \right) + \delta'_E \right] \\ E_y'' &= E_{\perp}'' \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \phi + z \cos \phi}{c_2} \right) + \delta''_E \right] \\ H_x'' &= H_{\parallel}'' \cos \phi \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \phi + z \cos \phi}{c_2} \right) + \delta''_E \right] \\ H_z'' &= -H_{\parallel}'' \sin \phi \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \phi + z \cos \phi}{c_2} \right) + \delta''_E \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

TM 波

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{\parallel} \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c_1} \right) \right] \\ E_z &= -E_{\parallel} \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c_1} \right) \right] \\ H_y &= H_{\perp} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c_1} \right) \right] \\ E_x' &= E_{\parallel}' \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c_1} \right) + \delta'_M \right] \\ E_z' &= E_{\parallel}' \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c_1} \right) + \delta'_M \right] \\ H_y' &= H_{\perp}' \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c_1} \right) + \delta'_M \right] \\ E_x'' &= E_{\parallel}'' \cos \phi \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \phi + z \cos \phi}{c_2} \right) + \delta''_M \right] \\ E_z'' &= -E_{\parallel}'' \sin \phi \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \phi + z \cos \phi}{c_2} \right) + \delta''_M \right] \\ H_y'' &= H_{\perp}'' \sin \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \phi + z \cos \phi}{c_2} \right) + \delta''_M \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。

5 連続の条件

反射波と透過波の振幅や位相を決めるのは境界条件である。

媒質が不連続に変化する点において

- 電場の、境界面に平行な成分が連続
- 磁場の、境界面に平行な成分が連続

である。

$z = 0$ の平面が媒質の境界なので、その境界上の点 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ における電場と磁場を求めてみる。

(11) (12) 式に $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ を代入すると

TE 波

$$\begin{aligned}
 E_y(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= E_{\perp} \sin[\omega t] \\
 H_x(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= H_{\parallel} \cos \theta \sin[\omega t] \\
 H_z(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= -H_{\parallel} \sin \theta \sin[\omega t] \\
 E_y'(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= E_{\perp}' \sin[\omega t + \delta'_E] \\
 H_x'(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= H_{\parallel}' \cos \theta \sin[\omega t + \delta'_E] \\
 H_z'(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= H_{\parallel}' \sin \theta \sin[\omega t + \delta'_E] \\
 E_y''(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= E_{\perp}'' \sin[\omega t + \delta''_E] \\
 H_x''(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= H_{\parallel}'' \cos \phi \sin[\omega t + \delta''_E] \\
 H_z''(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= -H_{\parallel}'' \sin \phi \sin[\omega t + \delta''_E]
 \end{aligned}$$

TM 波

$$\begin{aligned}
 E_x(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= E_{\parallel} \cos \theta \sin[\omega t] \\
 E_z(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= -E_{\parallel} \sin \theta \sin[\omega t] \\
 H_y(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= H_{\perp} \sin[\omega t] \\
 E_x'(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= E_{\parallel}' \cos \theta \sin[\omega t + \delta'_M] \\
 E_z'(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= E_{\parallel}' \sin \theta \sin[\omega t + \delta'_M] \\
 H_y'(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= H_{\perp}' \sin[\omega t + \delta'_M] \\
 E_x''(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= E_{\parallel}'' \cos \phi \sin[\omega t + \delta''_M] \\
 E_z''(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= -E_{\parallel}'' \sin \phi \sin[\omega t + \delta''_M] \\
 H_y''(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= H_{\perp}'' \sin[\omega t + \delta''_M]
 \end{aligned}$$

となる。

よって、TE 波 に関して、 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ における両側の媒質の電場と磁場はそれぞれ

入射側

透過側

$$\begin{aligned} E_y(\mathbf{r}=\mathbf{0}) + E'_y(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= E_{\perp} \sin[\omega t] + E'_{\perp} \sin[\omega t + \delta'_E] & E''_y(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= E_{\perp}'' \sin[\omega t + \delta''_E] \\ H_x(\mathbf{r}=\mathbf{0}) + H'_x(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= H_{\parallel} \cos \theta \sin[\omega t] + H'_{\parallel} \cos \theta \sin[\omega t + \delta'_E] & H''_x(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= H_{\parallel}'' \cos \phi \sin[\omega t + \delta''_E] \\ H_z(\mathbf{r}=\mathbf{0}) + H'_z(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= -H_{\parallel} \sin \theta \sin[\omega t] + H'_{\parallel} \sin \theta \sin[\omega t + \delta'_E] & H''_z(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= -H_{\parallel}'' \sin \phi \sin[\omega t + \delta''_E] \end{aligned}$$

である。TM 波 に関して、 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ における両側の媒質の電場と磁場はそれぞれ

入射側

透過側

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}=\mathbf{0}) + E'_x(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= E_{\parallel} \cos \theta \sin[\omega t] + E'_{\parallel} \cos \theta \sin[\omega t + \delta'_M] & E''_x(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= E_{\parallel}'' \cos \phi \sin[\omega t + \delta''_M] \\ E_z(\mathbf{r}=\mathbf{0}) + E'_z(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= -E_{\parallel} \sin \theta \sin[\omega t] + E'_{\parallel} \sin \theta \sin[\omega t + \delta'_M] & E''_z(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= -E_{\parallel}'' \sin \phi \sin[\omega t + \delta''_M] \\ H_y(\mathbf{r}=\mathbf{0}) + H'_y(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= H_{\perp} \sin[\omega t] + H'_{\perp} \sin[\omega t + \delta'_M] & H''_y(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= H_{\perp}'' \sin[\omega t + \delta''_M] \end{aligned}$$

である。

境界面に平行な成分は、 x 成分と y 成分である。つまり、電場・磁場の x 成分・ y 成分がそれぞれ $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ において両側の媒質で等しいのである。よって

TE 波 $E_{\perp} \sin[\omega t] + E'_{\perp} \sin[\omega t + \delta'_E] = E_{\perp}'' \sin[\omega t + \delta''_E]$ (13)

$$H_{\parallel} \cos \theta \sin[\omega t] + H'_{\parallel} \cos \theta \sin[\omega t + \delta'_E] = H_{\parallel}'' \cos \phi \sin[\omega t + \delta''_E] \quad (14)$$

TM 波 $E_{\parallel} \cos \theta \sin[\omega t] + E'_{\parallel} \cos \theta \sin[\omega t + \delta'_M] = E_{\parallel}'' \cos \phi \sin[\omega t + \delta''_M]$ (15)

$$H_{\perp} \sin[\omega t] + H'_{\perp} \sin[\omega t + \delta'_M] = H_{\perp}'' \sin[\omega t + \delta''_M] \quad (16)$$

が成り立つ。

(10) 式を考慮すると、(13) 式と (14) 式は

TE 波 $E_{\perp} \sin[\omega t] + E'_{\perp} \sin[\omega t + \delta'_E] = E_{\perp}'' \sin[\omega t + \delta''_E]$ (17)

$$-\frac{E_{\perp}}{c_1 \mu_1} \cos \theta \sin[\omega t] + \frac{E'_{\perp}}{c_1 \mu_1} \cos \theta \sin[\omega t + \delta'_E] = -\frac{E_{\perp}''}{c_2 \mu_2} \cos \phi \sin[\omega t + \delta''_E] \quad (18)$$

であり、(15) 式と (16) 式は

TM 波 $c_1 \mu_1 H_{\perp} \cos \theta \sin[\omega t] - c_1 \mu_1 H'_{\perp} \cos \theta \sin[\omega t + \delta'_M] = c_2 \mu_2 H_{\perp}'' \cos \phi \sin[\omega t + \delta''_M]$ (19)

$$H_{\perp} \sin[\omega t] + H'_{\perp} \sin[\omega t + \delta'_M] = H_{\perp}'' \sin[\omega t + \delta''_M] \quad (20)$$

である。

6 反射波の振幅と位相

TE 波 の反射波の振幅と位相を求めよう。

(17) 式を (18) 式の右辺に代入して

$$-\frac{E_{\perp}}{c_1 \mu_1} \cos \theta \sin [\omega t] + \frac{E_{\perp}'}{c_1 \mu_1} \cos \theta \sin [\omega t + \delta'_E] = -\frac{E_{\perp}}{c_2 \mu_2} \cos \phi \sin [\omega t] - \frac{E_{\perp}'}{c_2 \mu_2} \cos \phi \sin [\omega t + \delta'_E]$$

これを解く。

$$E_{\perp}' \left(\frac{\cos \theta}{c_1 \mu_1} + \frac{\cos \phi}{c_2 \mu_2} \right) \sin [\omega t + \delta'_E] = E_{\perp} \left(\frac{\cos \theta}{c_1 \mu_1} - \frac{\cos \phi}{c_2 \mu_2} \right) \sin [\omega t]$$

この等式が t によらず成り立つためには

$$\delta'_E = 0 \quad \text{かつ} \quad E_{\perp}' = \frac{\left(\frac{\cos \theta}{c_1 \mu_1} - \frac{\cos \phi}{c_2 \mu_2} \right)}{\left(\frac{\cos \theta}{c_1 \mu_1} + \frac{\cos \phi}{c_2 \mu_2} \right)} E_{\perp} \quad (21)$$

でなければならない。

TM 波 の反射波の振幅と位相を求めよう。

(20) 式を (19) 式の右辺に代入して

$$c_1 \mu_1 H_{\perp} \cos \theta \sin [\omega t] - c_1 \mu_1 H_{\perp}' \cos \theta \sin [\omega t + \delta'_M] = c_2 \mu_2 H_{\perp} \cos \phi \sin [\omega t] + c_2 \mu_2 H_{\perp}' \cos \phi \sin [\omega t + \delta'_M]$$

これを解く。

$$H_{\perp}' \left(-c_1 \mu_1 \cos \theta - c_2 \mu_2 \cos \phi \right) \sin [\omega t + \delta'_M] = H_{\perp} \left(-c_1 \mu_1 \cos \theta + c_2 \mu_2 \cos \phi \right) \sin [\omega t]$$

この等式が t によらず成り立つためには

$$\delta'_M = 0 \quad \text{かつ} \quad H_{\perp}' = \frac{\left(c_1 \mu_1 \cos \theta - c_2 \mu_2 \cos \phi \right)}{\left(c_1 \mu_1 \cos \theta + c_2 \mu_2 \cos \phi \right)} H_{\perp} \quad (22)$$

でなければならない。

以上に結論として得られた (21) (22) 式を、対称性が見やすくなるように変形する。

光の速さ c_1 、 c_2 は

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \quad (23)$$

であることが知られている。

これらを使えば、(21) 式より **TE 波** の反射波の振幅

$$\begin{aligned} E_{\perp}' &= \frac{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \phi\right)}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \phi\right)} E_{\perp} \\ E_{\perp}' &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} \cos \phi}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} \cos \phi} E_{\perp} \end{aligned} \quad (24)$$

が、また (22) 式より **TM 波** の反射波の振幅

$$\begin{aligned} H_{\perp}' &= \frac{\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta - \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \phi\right)}{\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \phi\right)} H_{\perp} \\ H_{\perp}' &= \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} \cos \phi}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} \cos \phi} H_{\perp} \end{aligned} \quad (25)$$

が得られる。

さらにわかりやすくするために、誘電率と透磁率の相対値をそれぞれ ε_{12} 、 μ_{12} とおく。すなわち

$$\varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \mu_{12} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

とする。すると、**TE 波** の反射波の振幅 (24) 式は

$$E_{\perp}' = \frac{\sqrt{\mu_{12}} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12}} \cos \phi}{\sqrt{\mu_{12}} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12}} \cos \phi} E_{\perp} \quad (26)$$

となり、**TM 波** の反射波の振幅 (25) 式は

$$H_{\perp}' = \frac{\sqrt{\varepsilon_{12}} \cos \theta - \sqrt{\mu_{12}} \cos \phi}{\sqrt{\varepsilon_{12}} \cos \theta + \sqrt{\mu_{12}} \cos \phi} H_{\perp} \quad (27)$$

となる。

ϕ は θ に依存して定まるため、 ϕ を消去して θ で表す形に変形する。

θ も ϕ も 0 以上 $\frac{\pi}{2}$ 以下であることに留意する。このとき

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi}$$

であることと、Snell の法則

$$\sin \phi = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta \quad (28)$$

から

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta}$$

である。光の速さと誘電率・透磁率の関係 (23) 式を考慮すると

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta} \\ \cos \phi &= \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。

これを使うと、[TE 波] の反射波の振幅 (26) 式は

$$\begin{aligned} E_{\perp}' &= \frac{\sqrt{\mu_{12}} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \sin^2 \theta}}{\sqrt{\mu_{12}} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \sin^2 \theta}} E_{\perp} \\ E_{\perp}' &= \frac{\mu_{12} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} E_{\perp} \end{aligned} \quad (30)$$

となり、[TM 波] の反射波の振幅 (27) 式は

$$\begin{aligned} H_{\perp}' &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{12}} \cos \theta - \sqrt{\mu_{12}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \sin^2 \theta}}{\sqrt{\varepsilon_{12}} \cos \theta + \sqrt{\mu_{12}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \sin^2 \theta}} H_{\perp} \\ H_{\perp}' &= \frac{\varepsilon_{12} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} H_{\perp} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。

7 透過波の振幅と位相

透過波の振幅と位相も求めよう。

(17) 式に (30) 式の E_{\perp}' と (21) 式の δ'_E を代入し、(20) 式に (31) 式の H_{\perp}' と (22) 式の δ'_M を代入すると

$$[\text{TE 波}] \quad \delta''_E = 0 \quad \text{かつ} \quad E_{\perp}'' = \frac{2 \mu_{12} \cos \theta}{\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} E_{\perp} \quad (32)$$

$$[\text{TM 波}] \quad \delta''_M = 0 \quad \text{かつ} \quad H_{\perp}'' = \frac{2 \varepsilon_{12} \cos \theta}{\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} H_{\perp} \quad (33)$$

が導かれる。

8 Brewster 角

反射波の振幅が 0 になる入射角 (Brewster 角) を求める。

TE 波 に関しては、(30) 式より

$$\begin{aligned} \mu_{12} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta} &= 0 \\ \mu_{12}^2 \cos^2 \theta &= \varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta \\ \mu_{12}^2 \cos^2 \theta &= \varepsilon_{12} \mu_{12} - (1 - \cos^2 \theta) \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1}{\mu_{12}^2 - 1} \\ \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 &= \frac{\mu_{12} (\mu_{12} - \varepsilon_{12})}{\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1} \\ \tan^2 \theta &= \frac{\mu_{12} (\mu_{12} - \varepsilon_{12})}{\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1} \\ \tan \theta &= \sqrt{\frac{\mu_{12} (\mu_{12} - \varepsilon_{12})}{\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1}} \end{aligned} \tag{35}$$

を満たす θ が Brewster 角である。

TM 波 に関しては、(31) 式より

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta} &= 0 \\ \cos^2 \theta &= \frac{\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1}{\varepsilon_{12}^2 - 1} \end{aligned} \tag{36}$$

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{\varepsilon_{12} (\varepsilon_{12} - \mu_{12})}{\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1}} \tag{37}$$

を満たす θ が Brewster 角である。

9 Brewster 角の存在条件と値

Brewster 角が存在するならば、それを θ として、必ず

$$0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$$

である。これが満たされるのは ε_{12} と μ_{12} がどのような条件にある場合かを調べる。

9.1 TE 波

TE 波 については、(34) 式から導く。

まず、 $0 \leq \cos^2 \theta$ であるための条件は

$$\frac{\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1}{\mu_{12}^2 - 1} \geq 0$$

$$\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1 \gtrless 0 \quad \left(\begin{array}{ll} \mu_{12} > 1 & \text{なら} \\ \mu_{12} < 1 & \text{なら} \end{array} \right)$$

$$\varepsilon_{12} \mu_{12} \gtrless 1$$

のような変形から

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon_{12} \mu_{12} \geq 1 \\ \text{かつ} \\ \mu_{12} > 1 \end{array} \right) \quad \text{または} \quad \left(\begin{array}{l} \varepsilon_{12} \mu_{12} \leq 1 \\ \text{かつ} \\ \mu_{12} < 1 \end{array} \right)$$

であると導かれる。いっぽう、 $\cos^2 \theta \leq 1$ であるための条件は

$$\frac{\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1}{\mu_{12}^2 - 1} \leq 1$$

$$\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1 \lessgtr \mu_{12}^2 - 1 \quad \left(\begin{array}{ll} \mu_{12} > 1 & \text{なら} \\ \mu_{12} < 1 & \text{なら} \end{array} \right)$$

$$\varepsilon_{12} \mu_{12} \lessgtr \mu_{12}^2$$

$$\varepsilon_{12} \lessgtr \mu_{12}$$

のような変形から

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon_{12} \leq \mu_{12} \\ \text{かつ} \\ \mu_{12} > 1 \end{array} \right) \quad \text{または} \quad \left(\begin{array}{l} \varepsilon_{12} \geq \mu_{12} \\ \text{かつ} \\ \mu_{12} < 1 \end{array} \right)$$

であると導かれる。

$0 \leq \cos^2 \theta$ と $\cos^2 \theta \leq 1$ の両方が満たされる条件においてのみ Brewster 角が存在するので、上の両方を合わせると

- $\mu_{12} > 1$ の場合は、 $\frac{1}{\mu_{12}} \leq \varepsilon_{12} \leq \mu_{12}$ の条件においてだけ Brewster 角が存在する。
- $\mu_{12} < 1$ の場合は、 $\mu_{12} \leq \varepsilon_{12} \leq \frac{1}{\mu_{12}}$ の条件においてだけ Brewster 角が存在する。

とまとめることができる。

$\mu_{12} = 1$ の場合については次のように考察できる。まず、 $\mu_{12} = 1$ かつ $\varepsilon_{12} \mu_{12} \neq 1$ の場合について考えると、(34) 式の右辺が（分母 = 0 かつ 分子 = 有限値で）無限大となり、したがって (34) 式を満たす θ (Brewster 角) は存在しない。次に、 $\mu_{12} = 1$ かつ $\varepsilon_{12} \mu_{12} = 1$ の場合について考えると、このとき $\varepsilon_{12} = 1$ であり、すなわち「 $\varepsilon_{12} = 1$ かつ $\mu_{12} = 1$ 」が成り立っている。これは、2 種類の媒質が同一である状況を意味しており、そもそも反射が起こり得る状況ではないので、やはり Brewster 角は存在しないと言える。よって、結局、 $\mu_{12} = 1$ の場合には、 ε_{12} にかかわらず、TE 波の Brewster 角は存在しない。

なお、Brewster 角はすでに何度も述べているとおり (34) 式もしくはそれを変形した (35) 式により定まるが、とくに $\varepsilon_{12} = 1$ の場合には、(35) 式が

$$\tan \theta = \sqrt{\mu_{12}}$$

となって非常に簡単な形が得られる。

9.2 TM 波

TM 波 については、(36) 式から導く。

まず、 $0 \leq \cos^2 \theta$ であるための条件は

$$\frac{\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1}{\varepsilon_{12}^2 - 1} \geq 0$$

$$\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1 \gtrless 0 \quad \left(\begin{array}{ll} \varepsilon_{12} > 1 & \text{なら} \\ \varepsilon_{12} < 1 & \text{なら} \end{array} \right)$$

$$\varepsilon_{12} \mu_{12} \gtrless 1$$

のような変形から

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon_{12} \mu_{12} \geq 1 \\ \text{かつ} \\ \varepsilon_{12} > 1 \end{array} \right) \quad \text{または} \quad \left(\begin{array}{l} \varepsilon_{12} \mu_{12} \leq 1 \\ \text{かつ} \\ \varepsilon_{12} < 1 \end{array} \right)$$

であると導かれる。いっぽう、 $\cos^2 \theta \leq 1$ であるための条件は

$$\frac{\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1}{\varepsilon_{12}^2 - 1} \leq 1$$

$$\varepsilon_{12} \mu_{12} - 1 \leq \varepsilon_{12}^2 - 1 \quad \left(\begin{array}{ll} \varepsilon_{12} > 1 & \text{なら} \\ \varepsilon_{12} < 1 & \text{なら} \end{array} \right)$$

$$\varepsilon_{12} \mu_{12} \leq \varepsilon_{12}^2$$

$$\mu_{12} \leq \varepsilon_{12}$$

のような変形から

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon_{12} \leq \mu_{12} \\ \text{かつ} \\ \varepsilon_{12} > 1 \end{array} \right) \quad \text{または} \quad \left(\begin{array}{l} \varepsilon_{12} \geq \mu_{12} \\ \text{かつ} \\ \varepsilon_{12} < 1 \end{array} \right)$$

であると導かれる。

$0 \leq \cos^2 \theta$ と $\cos^2 \theta \leq 1$ の両方が満たされる条件においてのみ Brewster 角が存在するので、上の両方を合わせると

- $\varepsilon_{12} > 1$ の場合は、 $\frac{1}{\varepsilon_{12}} \leq \mu_{12} \leq \varepsilon_{12}$ の条件においてだけ Brewster 角が存在する。
- $\varepsilon_{12} < 1$ の場合は、 $\varepsilon_{12} \leq \mu_{12} \leq \frac{1}{\varepsilon_{12}}$ の条件においてだけ Brewster 角が存在する。

とまとめることができる。

$\varepsilon_{12} = 1$ の場合については次のように考察できる。まず、 $\varepsilon_{12} = 1$ かつ $\varepsilon_{12} \mu_{12} \neq 1$ の場合について考えると、(36) 式の右辺が（分母 = 0 かつ 分子 = 有限値 で）無限大となり、したがって (36) 式を満たす θ (Brewster 角) は存在しない。次に、 $\varepsilon_{12} = 1$ かつ $\varepsilon_{12} \mu_{12} = 1$ の場合について考えると、このとき $\mu_{12} = 1$ であり、すなわち「 $\varepsilon_{12} = 1$ かつ $\mu_{12} = 1$ 」が成り立っている。これは、2 種類の媒質が同一である状況を意味しており、そもそも反射が起こり得る状況ではないので、やはり Brewster 角は存在しないと言える。よって、結局、 $\varepsilon_{12} = 1$ の場合には、 μ_{12} にかかわらず、TM 波の Brewster 角は存在しない。

なお、Brewster 角はすでに何度も述べているとおり (36) 式もしくはそれを変形した (37) 式により定まるが、とくに $\mu_{12} = 1$ の場合には、(37) 式が

$$\tan \theta = \sqrt{\varepsilon_{12}}$$

となって非常に簡単な形が得られる。

9.3 ここまで結論のまとめ

以上をまとめて整理したものが下表である。これは、 ε_{12} と μ_{12} の様々な値に対して、Brewster 角が存在するかどうか、また、存在するならばその値を示したものである。 ε_{12} と μ_{12} の「0」および「 ∞ 」に対する表の値は、極限値である。表中の四角いマスは、 $\varepsilon_{12} = \mu_{12}$ または $\varepsilon_{12} = \frac{1}{\mu_{12}}$ の場合を示している（左下から右上への対角線上のマスが前者、左上から右下への対角線上のマスが後者である）。表の中央のマスの「 $\frac{\pi}{4}$ 」という値は、 ε_{12} または μ_{12} を 1 に限りなく近づけた場合の極限値である（前述したように実際にはその条件では Brewster 角は存在しないと言える）。

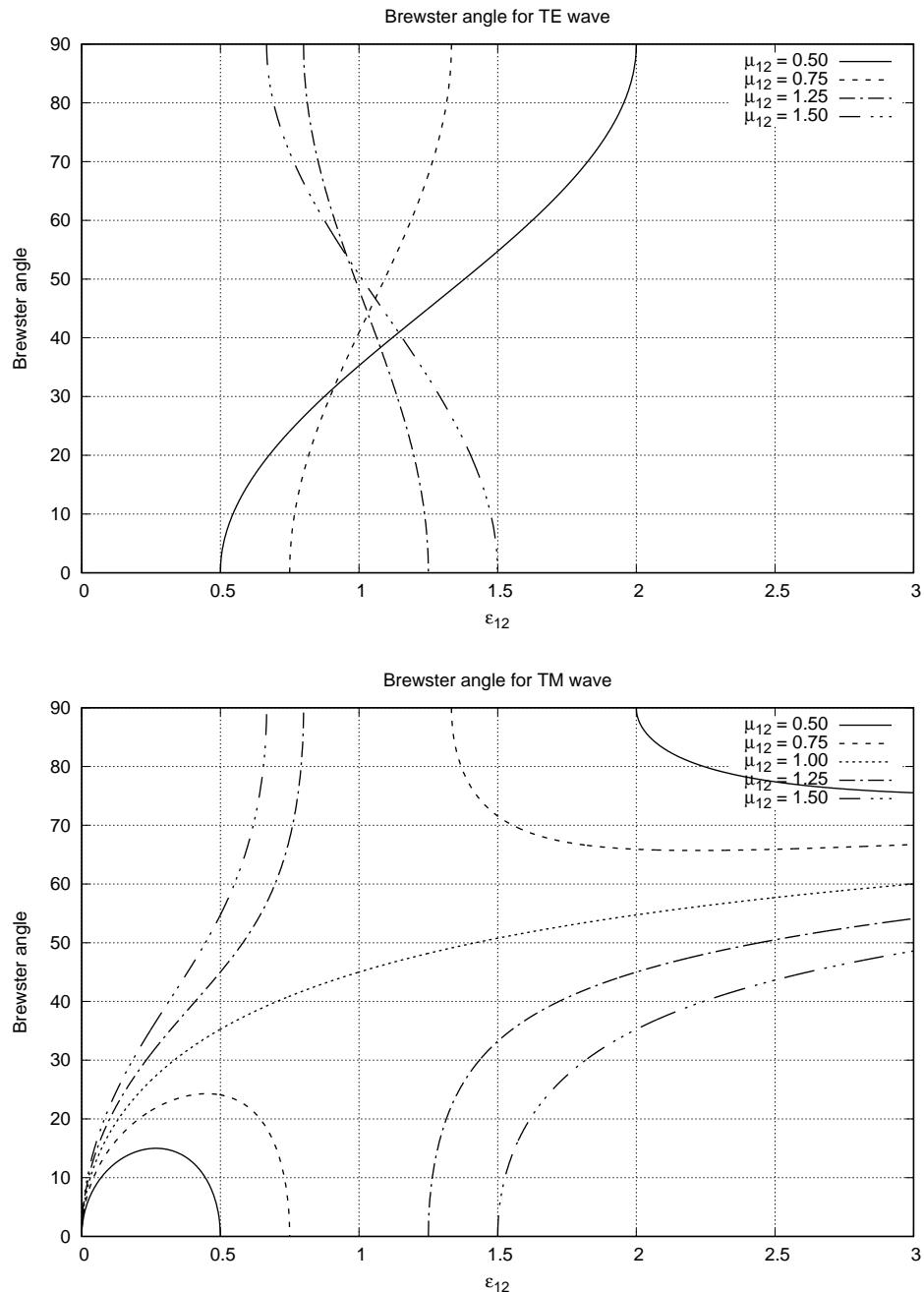
TE 波の Brewster 角

		小	\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow	ε_{12}	\rightarrow	\rightarrow	\rightarrow	大
		0	1	∞
μ_{12}	∞	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	不定
	\vdots	$\frac{\pi}{2}$		$\arctan \sqrt{\mu_{12}}$	0	
	\vdots		$\frac{\pi}{2}$	0		
	\vdots			$\frac{\pi}{2}$			0			
	1	存在しない				$\frac{\pi}{4}$	存在しない			
	\downarrow	\vdots		0			$\frac{\pi}{2}$			
	\downarrow	\vdots	0	...		$\arctan \sqrt{\mu_{12}}$...	$\frac{\pi}{2}$		
	\downarrow	\vdots	0	$\frac{\pi}{2}$	
小	0	0	0	0	0	0	0	0	0	不定

TM 波の Brewster 角

		小	\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow	ε_{12}	\rightarrow	\rightarrow	\rightarrow	大
		0	1	∞
μ_{12}	∞	不定								不定
	\vdots	0	$\frac{\pi}{2}$					0		$\frac{\pi}{2}$
	\vdots	0	\vdots	$\frac{\pi}{2}$					\vdots	$\frac{\pi}{2}$
	\vdots	0	\vdots	\vdots	$\frac{\pi}{2}$		0	\vdots	\vdots	$\frac{\pi}{2}$
	1	0	$\arctan \sqrt{\varepsilon_{12}}$		$\frac{\pi}{4}$	$\arctan \sqrt{\varepsilon_{12}}$				$\frac{\pi}{2}$
	\downarrow	\vdots	\vdots	\vdots	0		$\frac{\pi}{2}$	\vdots	\vdots	$\frac{\pi}{2}$
	\downarrow	\vdots	0	\vdots	0		$\frac{\pi}{2}$		\vdots	$\frac{\pi}{2}$
	\downarrow	\vdots	0	0	存在しない			$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
小	0	0								$\frac{\pi}{2}$

グラフを描いてみると、次のようになる。



10 現実の場合

現実の物質は、強磁性体を除き、比透磁率が 5桁 の精度で 1 に等しい。

よって、ほとんどの場合において $\mu_{12} \approx 1$ とできる。

つまり、現実のほとんどのケースでは、TE 波には Brewster 角が存在せず、TM 波には

$$\tan \theta = \sqrt{\epsilon_{12}}$$

を満たす θ なる Brewster 角が存在する。

このとき

$$\tan^2 \theta = \varepsilon_{12}$$

より

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_{12} + 1}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{12} + 1}} \quad (38)$$

である。また

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= \frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12} + 1}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12} + 1}} \quad (39)$$

である。いっぽう、Snell の法則より

$$\begin{aligned}\sin \phi &= \frac{c_2}{c_1} \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \sin \theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12}}} \sin \theta\end{aligned}$$

であるが、いまは $\mu_{12} = 1$ とおいているので

$$\begin{aligned}\sin \phi &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{12}}} \sin \theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{12}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12} + 1}}\end{aligned}$$

結局

$$\sin \phi = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{12} + 1}} \quad (40)$$

である。そして

$$\begin{aligned}\cos^2 \phi &= 1 - \sin^2 \phi \\ &= \frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12} + 1}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12} + 1}} \quad (41)$$

である。

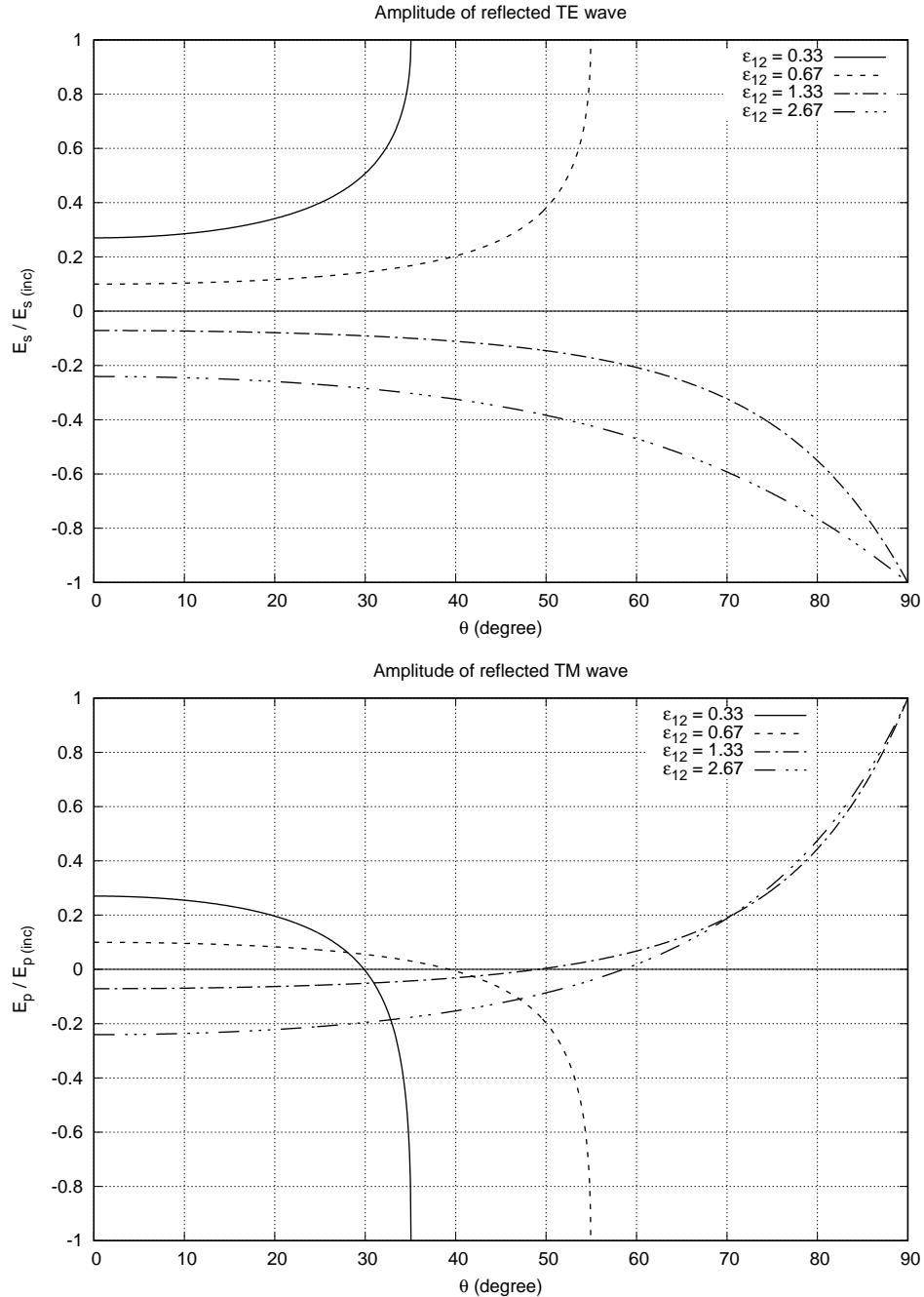
以上に得た (38) (39) (40) (41) 式を使うと

$$\begin{aligned}\sin[\theta + \phi] &= \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12} + 1}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12} + 1}} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{12} + 1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{12} + 1}} \\ &= 1\end{aligned}$$

となり、 $(\theta + \phi) = \frac{\pi}{2}$ が成り立っていることがわかる。これは、反射光の射線と透過光の射線とが互いに直交することを意味する。

11 反射による位相の反転

(30) (31) 式より、 $\mu_{12} = 1$ のとき、入射角に対して反射波の電場の p・s 成分の振幅がどう変化するかをグラフで表すと、下のようになる。図中の E_s 、 E_p はそれぞれ E_{\perp}' 、 E_{\parallel}' のことであり、 $E_{s(\text{inc})}$ 、 $E_{p(\text{inc})}$ はそれぞれ E_{\perp} 、 E_{\parallel} のことである。



以下では、 $\frac{E_{\perp}'}{E_{\perp}}$ や $\frac{E_{\parallel}'}{E_{\parallel}}$ 、すなわち入射波の電場の振幅に対する反射波の電場の振幅の比のことを、「振幅反射比」と呼ぶ。

$\mu_{12} = 1$ のとき、(30) (31) 式や上のグラフより、[TE 波] の振幅反射比について次のことが言える。

振幅反射比の符号は、 $\epsilon_{12} < 1$ の場合に正で $\epsilon_{12} > 1$ の場合に負である。これは、光学インピーダンスの小さい媒質から大きい媒質への入射に伴っては（電場について）自由端反射が起こり、光学インピーダンスの大きい媒質から小さい媒質への入射に伴っては（電場について）固定端反射が起こる、と解釈することができる。

そして、振幅反射比の絶対値は、入射角 θ が 0 のときに最も小さく、 θ の増加にともなって徐々に大きくなり、最終的に 1 に到達する。

いっぽう、**TM波** の振幅反射比については、以下のことが言える。

振幅反射比は、入射角 θ が 0 であれば、 $\epsilon_{12} < 1$ の場合に正で $\epsilon_{12} > 1$ の場合に負である。このことは TE 波と同様である。

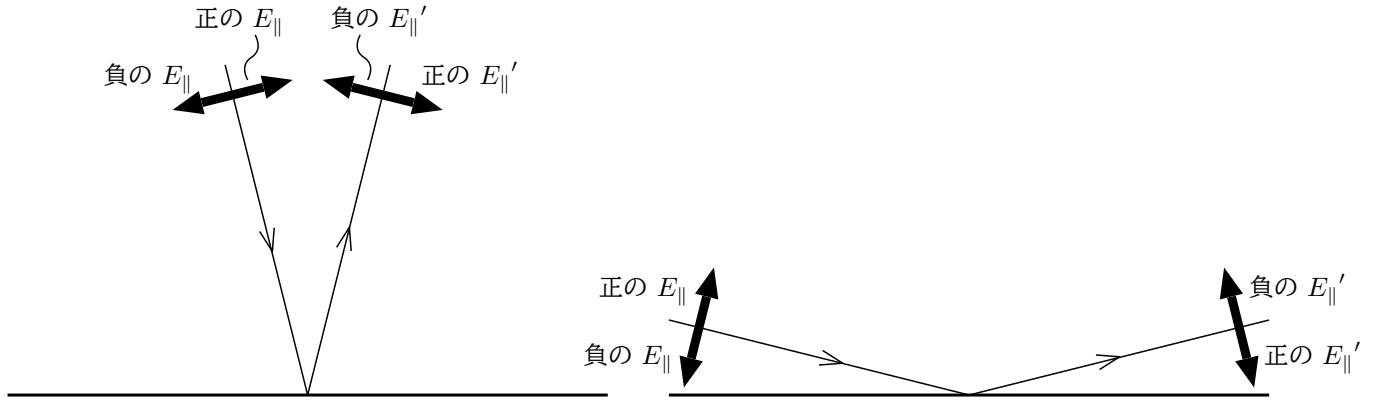
ところが、 θ を 0 から徐々に増加させると、振幅反射比の絶対値が徐々に減少し、あるところで 0 となって、それを境に符号が反転する。そしてそれ以降、ふたたび絶対値が増加し、最終的に絶対値 1 に到達する。

この、符号が反転する θ が **Brewster 角**である。

したがって、**TM波** に関して、次のように理解しなければならない。

振幅反射比の符号は、入射角が Brewster 角より小さい範囲では、TE 波と同様に、 $\epsilon_{12} < 1$ の場合に正で $\epsilon_{12} > 1$ の場合に負である。しかし、入射角が Brewster 角より大きい範囲では、それが逆転する。

なお、自由端反射・固定端反射という呼び方は、TM 波の電場に対しては適用しにくいことを指摘しておく。



図を描いて詳しく想像するとわかる。上の図の左のような、入射角の小さい状況では、見てのとおり、 $\frac{E'_{\parallel}}{E_{\parallel}}$ が正の場合を自由端反射、負の場合を固定端反射と呼べそうである。ところが、右のような、入射角の大きい状況では、よく見てみると、 $\frac{E'_{\parallel}}{E_{\parallel}}$ が負の場合を自由端反射、正の場合を固定端反射と呼べそうに思える。結局、TM 波の電場に関しては、「自由端反射」「固定端反射」という言葉の表す概念が曖昧なのである。

強いて言えば、電場の p 成分 (TM 波の電場) を x 成分と z 成分に分解して考えるならば、 $\frac{E'_{\parallel}}{E_{\parallel}}$ が正の場合に x 成分は自由端反射で z 成分は固定端反射、 $\frac{E'_{\parallel}}{E_{\parallel}}$ が負の場合に x 成分は固定端反射で z 成分は自由端反射、と呼ぶことはできなくもないだろう。

しかし、いずれにしても、「自由端」「固定端」のどちらと呼ぶのかという問題はさして重要でないということを理解するといい。ここで重要なのは、Brewster 角を境に、TM 波の反射波の電場の位相が反転することである。

12 エネルギーの保存

境界面におけるエネルギーの保存を確かめる。

まず、入射波の Poynting ベクトル \mathbf{S} を求める。(11) (12) 式を用い、(10) 式および $\frac{1}{c_1 \mu_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}$ であることを考慮に入れて

TE 波 ($E_{\parallel} = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ &= \begin{pmatrix} E_y H_z \\ 0 \\ -E_y H_x \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x - \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z \right]\end{aligned}$$

TM 波 ($H_{\parallel} = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ &= \begin{pmatrix} -E_z H_y \\ 0 \\ E_x H_y \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} H_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x - \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z \right]\end{aligned}$$

である。

次に、反射波の Poynting ベクトル \mathbf{S}' を求める。(11) (12) 式を用い、(30) (31) 式の E_{\perp}' 、 H_{\perp}' および (21) (22) 式の δ'_E 、 δ'_M を代入し、(10) 式および $\frac{1}{c_1 \mu_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}$ であることを考慮に入れて

TE 波 ($E_{\parallel} = E_{\parallel}' = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}' &= \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' \\ &= \begin{pmatrix} E_y' H_z' \\ 0 \\ -E_y' H_x' \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\mu_{12} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \cdot \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z \right]\end{aligned}$$

TM 波 ($H_{\parallel} = H_{\parallel}' = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}' &= \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' \\ &= \begin{pmatrix} -E_z' H_y' \\ 0 \\ E_x' H_y' \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\varepsilon_{12} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} H_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \cdot \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z \right]\end{aligned}$$

である。

さらに、透過波の Poynting ベクトル \mathbf{S}'' を求める。(11) (12) 式を用い、(32) (33) 式の E_{\perp}'' 、 H_{\perp}'' 、 δ_E'' 、 δ_M'' を代入し、(10) 式および $\frac{1}{c_2 \mu_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}$ であることを考慮に入れて

TE 波 ($E_{\parallel} = E_{\parallel}'' = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}'' &= \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}'' \\ &= \begin{pmatrix} E_y'' H_z'' \\ 0 \\ -E_y'' H_x'' \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{2 \mu_{12} \cos \theta}{\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \sin \phi \\ 0 \\ \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_2} \sin \phi \cdot x + \frac{\omega}{c_2} \cos \phi \cdot z \right]\end{aligned}$$

TM 波 ($H_{\parallel} = H_{\parallel}'' = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}'' &= \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}'' \\ &= \begin{pmatrix} -E_z'' H_y'' \\ 0 \\ E_x'' H_y'' \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{2 \varepsilon_{12} \cos \theta}{\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} H_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \sin \phi \\ 0 \\ \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_2} \sin \phi \cdot x + \frac{\omega}{c_2} \cos \phi \cdot z \right]\end{aligned}$$

である。

以上を使って、境界面上の面積素片 $d\sigma$ に出入りするエネルギーを考える。

$d\sigma \wedge$ Poynting ベクトル \mathbf{S} の波が入射するとき、 $d\sigma$ の法線と \mathbf{S} との間の角を ψ とすれば、 $d\sigma$ の \mathbf{S} に垂直な面への射影は $d\Sigma = d\sigma \cos \psi$ で、 $d\Sigma$ を単位時間あたり通過するエネルギーが $d\sigma$ へ単位時間あたり入射する。すなわち、 $d\sigma$ へ単位時間あたり入射するエネルギーは $|\mathbf{S}| d\Sigma = |\mathbf{S}| d\sigma \cos \psi$ である。 $|\mathbf{S}| \cos \psi$ が $|S_z|$ に等しいことに留意すると、結局、 $d\sigma$ へ単位時間あたり入射するエネルギーは、 $|S_z| d\sigma$ であると言える。

よって、境界面上は $z = 0$ であることを考慮に入れて、 $d\sigma$ へ単位時間あたり入射する入射波のエネルギーが

TE 波
$$|S_{z(z=0)}| d\sigma = \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] d\sigma$$

TM 波
$$|S_{z(z=0)}| d\sigma = \cos \theta \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} H_{\perp}^2 \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] d\sigma$$

であり、 $d\sigma$ から単位時間あたり放射される反射波のエネルギーが

TE 波
$$|S'_{z(z=0)}| d\sigma = \left(\frac{\mu_{12} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] d\sigma$$

TM 波
$$|S'_{z(z=0)}| d\sigma = \left(\frac{\varepsilon_{12} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \cos \theta \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} H_{\perp}^2 \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] d\sigma$$

であることが導かれる。

$d\sigma$ から単位時間あたり放射される透過波のエネルギーも同様だが、Snell の法則によって ϕ を消去できる ((28) (29) 式) ことに注意すると

TE 波
$$\begin{aligned} |S''_{z(z=0)}| d\sigma &= \left(\frac{2 \mu_{12} \cos \theta}{\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \cos \phi \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{\perp}^2 \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_2} \sin \phi \cdot x \right] d\sigma \\ &= \left(\frac{2 \mu_{12} \cos \theta}{\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \sin^2 \theta} \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}}{\mu_{12}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] d\sigma \end{aligned}$$

TM 波
$$\begin{aligned} |S''_{z(z=0)}| d\sigma &= \left(\frac{2 \varepsilon_{12} \cos \theta}{\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \cos \phi \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} H_{\perp}^2 \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_2} \sin \phi \cdot x \right] d\sigma \\ &= \left(\frac{2 \varepsilon_{12} \cos \theta}{\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \sin^2 \theta} \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\varepsilon_{12}}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} H_{\perp}^2 \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] d\sigma \end{aligned}$$

となる。

これらより

$$|S_{z(z=0)}| d\sigma = |S'_{z(z=0)}| d\sigma + |S''_{z(z=0)}| d\sigma \quad (42)$$

が示されれば、境界面上のあらゆる点においてエネルギーの保存が成り立っていることになる。

TE 波

(42) 式の 3 つの項は 共通因子 $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] d\sigma$ を持つので、それで $|S_{z(z=0)}| d\sigma$ 、 $|S_{z'(z=0)}| d\sigma$ 、 $|S_{z''(z=0)}| d\sigma$ を割ったものをそれぞれ s 、 s' 、 s'' とおけば、 $s = s' + s''$ の成立が (42) 式の成立と同等である。

$$\begin{aligned}
 s' + s'' &= \left(\frac{\mu_{12} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \cos \theta + \left(\frac{2 \mu_{12} \cos \theta}{\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \sin^2 \theta} \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}}{\mu_{12}}} \\
 &= \frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + \varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta - 2 \mu_{12} \cos \theta \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\left(\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta} \right)^2} \cos \theta \\
 &\quad + \frac{4 \mu_{12}^2 \cos^2 \theta}{\left(\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta} \right)^2} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \sin^2 \theta} \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}}{\mu_{12}}} \\
 &= \frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + \varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta - 2 \mu_{12} \cos \theta \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\left(\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta} \right)^2} \cos \theta + \frac{4 \mu_{12} \cos \theta \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\left(\mu_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta} \right)^2} \cos \theta \\
 &= \cos \theta \\
 &= s
 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、TE 波について、境界面上のあらゆる点においてエネルギーの保存の成り立っていることが確かめられる。

TM 波

(42) 式の 3 つの項は 共通因子 $\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} H_{\perp}^2 \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] d\sigma$ を持つので、それで $|S_{z(z=0)}| d\sigma$ 、 $|S_{z'(z=0)}| d\sigma$ 、 $|S_{z''(z=0)}| d\sigma$ を割ったものをそれぞれ s 、 s' 、 s'' とおけば、 $s = s' + s''$ の成立が (42) 式の成立と同等である。

$$\begin{aligned}
 s' + s'' &= \left(\frac{\varepsilon_{12} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \cos \theta + \left(\frac{2 \varepsilon_{12} \cos \theta}{\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}} \right)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \sin^2 \theta} \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\varepsilon_{12}}} \\
 &= \frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + \varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta - 2 \varepsilon_{12} \cos \theta \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\left(\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta} \right)^2} \cos \theta \\
 &\quad + \frac{4 \varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta}{\left(\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta} \right)^2} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \sin^2 \theta} \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\varepsilon_{12}}} \\
 &= \frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + \varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta - 2 \varepsilon_{12} \cos \theta \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\left(\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta} \right)^2} \cos \theta + \frac{4 \varepsilon_{12} \cos \theta \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta}}{\left(\varepsilon_{12} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12} - \sin^2 \theta} \right)^2} \cos \theta \\
 &= \cos \theta \\
 &= s
 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、TM 波について、境界面上のあらゆる点においてエネルギーの保存の成り立っていることが確かめられる。

13 全反射の場合

ところで、11 節のグラフによれば、振幅反射比の絶対値が 1 になるのは、 $\varepsilon_{12} > 1$ の場合には $\theta = \frac{\pi}{2}$ においてだが、 $\varepsilon_{12} < 1$ の場合には $\theta < \frac{\pi}{2}$ においてである。後者の場合に振幅反射比の絶対値が 1 になる θ は、ほかでもない、臨界角である。(30) (31) 式からもそのことは確かめられる。

θ が臨界角よりも大きい、すなわち全反射の場合の振幅反射比は、11 節のグラフには描かれていない。それは(30) (31) 式から計算できないからであるが、その絶対値が 1 になるであろうことは、エネルギーの保存を考えれば、容易に想像できる。

しかしながら、その符号が正なのか負なのかは、単純には予想がつかない。さらに言えば反射波の位相がどうなるのかもよくわからない。そこで、それらを知るべく、全反射の場合の反射波の電場を、位相も含めて理論的に導く。

原理的には、5 節に述べたとおり、媒質の境界での境界条件により定まると考えられる。しかし、5 節の議論では、「透過側の媒質中に（屈折角 θ の方向へ進む）平面波が生じる」という仮定から導かれる関係、すなわち(10)式（の透過波に関する部分）を使っている。この仮定が全反射の場合には成り立たなくなることを考慮しなくてはならない。

13.1 入射波と反射波の電場と磁場

まず、入射波と反射波は、これまでの仮定と変わらず、速さ c_1 で伝わる振動数 ω の平面波であり、 c_i と c_r も 2 節に記した(6) (7)式であるとする。

つまり、入射波と反射波の電場と磁場は、4 節で書き下した(11) (12)式（のうちの入射波と反射波に関するもの）である。

13.2 境界条件

媒質の境界での電場・磁場の境界条件は、変わらず成り立ち

- 電場の、境界面に平行な成分が連続
- 磁場の、境界面に平行な成分が連続
- 電束密度の、境界面に垂直な成分が連続
- 磁束密度の、境界面に垂直な成分が連続

である。

13.3 境界面上での入射側の媒質中の電場・磁場の接線成分と電束密度・磁束密度の法線成分

(11) (12)式のうちの入射波と反射波に関するものに $z = 0$ を代入すると

TE 波

$$\begin{aligned} E_y(z=0) &= E_\perp \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) \right] \\ H_x(z=0) &= H_\parallel \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) \right] \\ H_z(z=0) &= -H_\parallel \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) \right] \\ E'_y(z=0) &= E'_\perp \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) + \delta'_E \right] \\ H'_x(z=0) &= H'_\parallel \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) + \delta'_E \right] \\ H'_z(z=0) &= H'_\parallel \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) + \delta'_E \right] \end{aligned}$$

TM 波

$$\begin{aligned} E_x(z=0) &= E_\parallel \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) \right] \\ E_z(z=0) &= -E_\parallel \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) \right] \\ H_y(z=0) &= H_\perp \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) \right] \\ E'_x(z=0) &= E'_\parallel \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) + \delta'_M \right] \\ E'_z(z=0) &= E'_\parallel \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) + \delta'_M \right] \\ H'_y(z=0) &= H'_\perp \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) + \delta'_M \right] \end{aligned}$$

である。これらより、境界面上での入射側の媒質中の（境界条件にかかる）場の量は、以下のようになる。

電場の x 成分が

$$\begin{aligned}
& E_{x(z=0)} + E_{x'(z=0)} \\
&= E_{\parallel} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + E_{\parallel}' \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \delta'_M \right] \\
&= \left(E_{\parallel} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \right. \\
&\quad \left. + E_{\parallel}' \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \cos \delta'_M + E_{\parallel}' \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \sin \delta'_M \right) \cos \theta \\
&= \left((E_{\parallel} + E_{\parallel}' \cos \delta'_M) \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + E_{\parallel}' \sin \delta'_M \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \right) \cos \theta \\
&= \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \cos \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right]
\end{aligned} \tag{43}$$

ただし

$$\sin \xi_e = \frac{E_{\parallel}' \sin \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}}, \quad \cos \xi_e = \frac{E_{\parallel} + E_{\parallel}' \cos \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}}$$

電場の y 成分が

$$\begin{aligned}
& E_{y(z=0)} + E_{y'(z=0)} \\
&= E_{\perp} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + E_{\perp}' \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \delta'_E \right] \\
&= E_{\perp} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + E_{\perp}' \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \cos \delta'_E + E_{\perp}' \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \sin \delta'_E \\
&= (E_{\perp} + E_{\perp}' \cos \delta'_E) \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + E_{\perp}' \sin \delta'_E \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \\
&= \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right]
\end{aligned} \tag{44}$$

ただし

$$\sin \eta_e = \frac{E_{\perp}' \sin \delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}}, \quad \cos \eta_e = \frac{E_{\perp} + E_{\perp}' \cos \delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}}$$

電束密度（入射波の電束密度を D 、反射波の電束密度を D' とする）の z 成分が

$$\begin{aligned}
& D_{z(z=0)} + D_{z'(z=0)} \\
&= \varepsilon_1 E_{z(z=0)} + \varepsilon_1 E_{z'(z=0)} \\
&= -\varepsilon_1 E_{\parallel} \sin \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + \varepsilon_1 E_{\parallel}' \sin \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \delta'_M \right] \\
&= \varepsilon_1 \left(-E_{\parallel} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \right. \\
&\quad \left. + E_{\parallel}' \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \cos \delta'_M + E_{\parallel}' \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \sin \delta'_M \right) \sin \theta \\
&= \varepsilon_1 \left((-E_{\parallel} + E_{\parallel}' \cos \delta'_M) \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + E_{\parallel}' \sin \delta'_M \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \right) \sin \theta \\
&= \varepsilon_1 \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \zeta_e \right]
\end{aligned} \tag{45}$$

ただし

$$\sin \zeta_e = \frac{E_{\parallel}' \sin \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}}, \quad \cos \zeta_e = \frac{-E_{\parallel} + E_{\parallel}' \cos \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}}$$

である。

磁場の x 成分が

$$\begin{aligned}
H_{x(z=0)} + H_{x'(z=0)} &= H_{\parallel} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + H_{\parallel}' \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \delta'_E \right] \\
&= \left(H_{\parallel} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \right. \\
&\quad \left. + H_{\parallel}' \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \cos \delta'_E + H_{\parallel}' \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \sin \delta'_E \right) \cos \theta \\
&= \left((H_{\parallel} + H_{\parallel}' \cos \delta'_E) \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + H_{\parallel}' \sin \delta'_E \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \right) \cos \theta \\
&= \sqrt{H_{\parallel}^2 + H_{\parallel}'^2 + 2 H_{\parallel} H_{\parallel}' \cos \delta'_E} \cos \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_m \right]
\end{aligned} \tag{46}$$

ただし

$$\sin \xi_m = \frac{H_{\parallel}' \sin \delta'_E}{\sqrt{H_{\parallel}^2 + H_{\parallel}'^2 + 2 H_{\parallel} H_{\parallel}' \cos \delta'_E}}, \quad \cos \xi_m = \frac{H_{\parallel} + H_{\parallel}' \cos \delta'_E}{\sqrt{H_{\parallel}^2 + H_{\parallel}'^2 + 2 H_{\parallel} H_{\parallel}' \cos \delta'_E}}$$

磁場の y 成分が

$$\begin{aligned}
H_{y(z=0)} + H_{y'(z=0)} &= H_{\perp} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + H_{\perp}' \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \delta'_M \right] \\
&= H_{\perp} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + H_{\perp}' \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \cos \delta'_M + H_{\perp}' \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \sin \delta'_M \\
&= (H_{\perp} + H_{\perp}' \cos \delta'_M) \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + H_{\perp}' \sin \delta'_M \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \\
&= \sqrt{H_{\perp}^2 + H_{\perp}'^2 + 2 H_{\perp} H_{\perp}' \cos \delta'_M} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right]
\end{aligned} \tag{47}$$

ただし

$$\sin \eta_m = \frac{H_{\perp}' \sin \delta'_M}{\sqrt{H_{\perp}^2 + H_{\perp}'^2 + 2 H_{\perp} H_{\perp}' \cos \delta'_M}}, \quad \cos \eta_m = \frac{H_{\perp} + H_{\perp}' \cos \delta'_M}{\sqrt{H_{\perp}^2 + H_{\perp}'^2 + 2 H_{\perp} H_{\perp}' \cos \delta'_M}}$$

磁束密度（入射波の磁束密度を B 、反射波の磁束密度を B' とする）の z 成分が

$$\begin{aligned}
B_{z(z=0)} + B_{z'(z=0)} &= \mu_1 H_{z(z=0)} + \mu_1 H_{z'(z=0)} \\
&= -\mu_1 H_{\parallel} \sin \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + \mu_1 H_{\parallel}' \sin \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \delta'_E \right] \\
&= \mu_1 \left(-H_{\parallel} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \right. \\
&\quad \left. + H_{\parallel}' \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \cos \delta'_E + H_{\parallel}' \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \sin \delta'_E \right) \sin \theta \\
&= \mu_1 \left((-H_{\parallel} + H_{\parallel}' \cos \delta'_E) \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] + H_{\parallel}' \sin \delta'_E \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right] \right) \sin \theta \\
&= \mu_1 \sqrt{H_{\parallel}^2 + H_{\parallel}'^2 - 2 H_{\parallel} H_{\parallel}' \cos \delta'_E} \sin \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \zeta_m \right]
\end{aligned} \tag{48}$$

ただし

$$\sin \zeta_m = \frac{H_{\parallel}' \sin \delta'_E}{\sqrt{H_{\parallel}^2 + H_{\parallel}'^2 - 2 H_{\parallel} H_{\parallel}' \cos \delta'_E}}, \quad \cos \zeta_m = \frac{-H_{\parallel} + H_{\parallel}' \cos \delta'_E}{\sqrt{H_{\parallel}^2 + H_{\parallel}'^2 - 2 H_{\parallel} H_{\parallel}' \cos \delta'_E}}$$

である。

13.4 境界面上での透過側の媒質中の電場と磁場

透過側の媒質中の電束密度を D'' 、磁束密度を B'' として、境界条件は

$$\begin{aligned} E_x''_{(z=0)} &= E_x(z=0) + E'_x(z=0) & H_x''_{(z=0)} &= H_x(z=0) + H'_x(z=0) \\ E_y''_{(z=0)} &= E_y(z=0) + E'_y(z=0) & H_y''_{(z=0)} &= H_y(z=0) + H'_y(z=0) \\ D_z''_{(z=0)} &= D_z(z=0) + D'_z(z=0) & B_z''_{(z=0)} &= B_z(z=0) + B'_z(z=0) \end{aligned}$$

である。

(43) (44) (45) (46) (47) (48) 式とこの境界条件、さらに

$$E_z'' = \frac{1}{\varepsilon_2} D_z'' , \quad H_z'' = \frac{1}{\mu_2} B_z''$$

であることを使うと、境界面上での透過側の媒質中の電場と磁場が求まる。

電場は

$$E_x''_{(z=0)} = \sqrt{E_{\parallel}^2 + E'_{\parallel}^2 + 2E_{\parallel}E'_{\parallel}\cos\delta'_M} \cos\theta \cdot \sin\left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin\theta \cdot x + \xi_e\right] \quad (49)$$

$$E_y''_{(z=0)} = \sqrt{E_{\perp}^2 + E'_{\perp}^2 + 2E_{\perp}E'_{\perp}\cos\delta'_E} \sin\left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin\theta \cdot x + \eta_e\right] \quad (50)$$

$$E_z''_{(z=0)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E'_{\parallel}^2 - 2E_{\parallel}E'_{\parallel}\cos\delta'_M} \sin\theta \cdot \sin\left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin\theta \cdot x + \zeta_e\right] \quad (51)$$

ただし

$$\sin\xi_e = \frac{E'_{\parallel}\sin\delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E'_{\parallel}^2 + 2E_{\parallel}E'_{\parallel}\cos\delta'_M}} , \quad \cos\xi_e = \frac{E_{\parallel} + E'_{\parallel}\cos\delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E'_{\parallel}^2 + 2E_{\parallel}E'_{\parallel}\cos\delta'_M}} \quad (52)$$

$$\sin\eta_e = \frac{E'_{\perp}\sin\delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E'_{\perp}^2 + 2E_{\perp}E'_{\perp}\cos\delta'_E}} , \quad \cos\eta_e = \frac{E_{\perp} + E'_{\perp}\cos\delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E'_{\perp}^2 + 2E_{\perp}E'_{\perp}\cos\delta'_E}} \quad (53)$$

$$\sin\zeta_e = \frac{E'_{\parallel}\sin\delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E'_{\parallel}^2 - 2E_{\parallel}E'_{\parallel}\cos\delta'_M}} , \quad \cos\zeta_e = \frac{-E_{\parallel} + E'_{\parallel}\cos\delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E'_{\parallel}^2 - 2E_{\parallel}E'_{\parallel}\cos\delta'_M}} \quad (54)$$

である。

磁場は

$$H_x''_{(z=0)} = \sqrt{H_{\parallel}^2 + H'_{\parallel}^2 + 2H_{\parallel}H'_{\parallel}\cos\delta'_E} \cos\theta \cdot \sin\left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin\theta \cdot x + \xi_m\right] \quad (55)$$

$$H_y''_{(z=0)} = \sqrt{H_{\perp}^2 + H'_{\perp}^2 + 2H_{\perp}H'_{\perp}\cos\delta'_M} \sin\left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin\theta \cdot x + \eta_m\right] \quad (56)$$

$$H_z''_{(z=0)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{H_{\parallel}^2 + H'_{\parallel}^2 - 2H_{\parallel}H'_{\parallel}\cos\delta'_E} \sin\theta \cdot \sin\left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin\theta \cdot x + \zeta_m\right] \quad (57)$$

ただし

$$\sin\xi_m = \frac{H'_{\parallel}\sin\delta'_E}{\sqrt{H_{\parallel}^2 + H'_{\parallel}^2 + 2H_{\parallel}H'_{\parallel}\cos\delta'_E}} , \quad \cos\xi_m = \frac{H_{\parallel} + H'_{\parallel}\cos\delta'_E}{\sqrt{H_{\parallel}^2 + H'_{\parallel}^2 + 2H_{\parallel}H'_{\parallel}\cos\delta'_E}} \quad (58)$$

$$\sin\eta_m = \frac{H'_{\perp}\sin\delta'_M}{\sqrt{H_{\perp}^2 + H'_{\perp}^2 + 2H_{\perp}H'_{\perp}\cos\delta'_M}} , \quad \cos\eta_m = \frac{H_{\perp} + H'_{\perp}\cos\delta'_M}{\sqrt{H_{\perp}^2 + H'_{\perp}^2 + 2H_{\perp}H'_{\perp}\cos\delta'_M}} \quad (59)$$

$$\sin\zeta_m = \frac{H'_{\parallel}\sin\delta'_E}{\sqrt{H_{\parallel}^2 + H'_{\parallel}^2 - 2H_{\parallel}H'_{\parallel}\cos\delta'_E}} , \quad \cos\zeta_m = \frac{-H_{\parallel} + H'_{\parallel}\cos\delta'_E}{\sqrt{H_{\parallel}^2 + H'_{\parallel}^2 - 2H_{\parallel}H'_{\parallel}\cos\delta'_E}} \quad (60)$$

である。

13.5 この先の考え方

境界面上での透過側の媒質中の電場と磁場を E_{\perp} 、 E_{\parallel} 、 H_{\perp} 、 H_{\parallel} 、 E'_{\perp} 、 E'_{\parallel} 、 H'_{\perp} 、 H'_{\parallel} 、 δ'_E 、 δ'_M で表す式が得られた。

しかし、これらは、境界条件だけから導き出されたものであり、透過側の媒質において誘電率と透磁率が入射側の媒質とは異なるという条件を反映していない。

その条件に依存する関係が Maxwell 方程式によって E''_x 、 E''_y 、 E''_z 、 H''_x 、 H''_y 、 H''_z の間に要請されるため、(49) (50) (51) (55) (56) (57) 式に含まれている量の間に制約が生じて、 E'_{\perp} 、 E'_{\parallel} 、 H'_{\perp} 、 H'_{\parallel} 、 δ'_E 、 δ'_M が定まるのだと考えられる。

そこで、次のような考え方で以て、 E'_{\perp} 、 E'_{\parallel} 、 H'_{\perp} 、 H'_{\parallel} 、 δ'_E 、 δ'_M を求める。

まず、(49) (50) (51) 式の $E''_{x(z=0)}$ 、 $E''_{y(z=0)}$ 、 $E''_{z(z=0)}$ から、透過側の媒質中の条件の下で Maxwell 方程式を使って $H''_{x(z=0)}$ 、 $H''_{y(z=0)}$ 、 $H''_{z(z=0)}$ を求める。それらの結果が (55) (56) (57) 式に等しいとおけば、方程式が得られるから、その方程式を解いて、目的の量を求める。

すると、そのためには、Maxwell 方程式 (1) (2) 式を使って、透過側の媒質中における電場から磁場を導くことが必要になる。それには、(1) (2) 式より、電場を空間で微分し、さらに時間で積分することになる。この「電場を空間で微分する」という計算をするためには、透過側の媒質中での電場 \mathbf{E}'' を境界面上に限らず r の関数として知っていなければならない。よって、それを求めることも必要となる。

以上より、この先の手順は、次のようにすればよいと考えられる。

- 透過側の媒質中で Maxwell 方程式を満たし、しかも (49) (50) (51) 式を満たすような、境界面上に限らない r の関数としての \mathbf{E}'' を求める。
- 求めた \mathbf{E}'' から、Maxwell 方程式を使い、 r の関数としての \mathbf{H}'' を求める。(この \mathbf{H}'' は H_{\perp} 、 H_{\parallel} 、 H'_{\perp} 、 H'_{\parallel} を用いず E_{\perp} 、 E_{\parallel} 、 E'_{\perp} 、 E'_{\parallel} を用いた表現になる。)
- 求めた \mathbf{H}'' に $z = 0$ を代入し、 $H''_{x(z=0)}$ 、 $H''_{y(z=0)}$ 、 $H''_{z(z=0)}$ を求める。
- 求めた $H''_{x(z=0)}$ 、 $H''_{y(z=0)}$ 、 $H''_{z(z=0)}$ が (55) (56) (57) 式に等しいとき、方程式とする。((55) (56) (57) 式に含まれている H_{\perp} 、 H_{\parallel} 、 H'_{\perp} 、 H'_{\parallel} は (10) 式を使って消去し E_{\perp} 、 E_{\parallel} 、 E'_{\perp} 、 E'_{\parallel} に置き換える。)
- 導いた方程式を解き、 E'_{\perp} 、 E'_{\parallel} 、 δ'_E 、 δ'_M を求める。

13.6 透過側の媒質中の電場

境界面上に限らない r の関数としての E'' を求める。

どのような形の式になるのか不明であるが、ひとまず、仮に(3)式の形を仮定する。現実には透過側の媒質中に平面波は生じないので、それが境界条件(49)(50)(51)式を満たすと仮定しても、物理的には破綻する。具体的には \mathbf{c}_t の z 成分が複素数になってしまい物理的な意味を持たない（ように見える）。しかし、それでも、数学的には(3)式の形の関数なら Maxwell 方程式を満たすことは確かなので、ひとまず複素数を含んでも(3)式の形であるような解を求めてみて、その中に物理的意味のある解が隠れていないかどうかを探すことにする。

そこで

$$\begin{aligned} E_x'' &= E_{0x}'' \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}_t}{c_2^2} \right) + \delta_x'' \right] \\ E_y'' &= E_{0y}'' \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}_t}{c_2^2} \right) + \delta_y'' \right] \\ E_z'' &= E_{0z}'' \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}_t}{c_2^2} \right) + \delta_z'' \right] \end{aligned}$$

（ δ も成分により異なると仮定する）すなわち

$$E_x'' = E_{0x}'' \sin \left[\omega t - \frac{\omega c_{tx} x}{c_2^2} - \frac{\omega c_{ty} y}{c_2^2} - \frac{\omega c_{tz} z}{c_2^2} + \delta_x'' \right] \quad (61)$$

$$E_y'' = E_{0y}'' \sin \left[\omega t - \frac{\omega c_{tx} x}{c_2^2} - \frac{\omega c_{ty} y}{c_2^2} - \frac{\omega c_{tz} z}{c_2^2} + \delta_y'' \right] \quad (62)$$

$$E_z'' = E_{0z}'' \sin \left[\omega t - \frac{\omega c_{tx} x}{c_2^2} - \frac{\omega c_{ty} y}{c_2^2} - \frac{\omega c_{tz} z}{c_2^2} + \delta_z'' \right] \quad (63)$$

とおく。ただし、(61)(62)(63)式は

$$c_2 = \sqrt{c_{tx}^2 + c_{ty}^2 + c_{tz}^2} \quad (64)$$

が成り立っていてかつ $c_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}$ である場合に Maxwell 方程式を満たすということに留意する。

最初に、 x 成分(61)式について考察し、 E_{0x}'' 、 c_{tx} 、 c_{ty} 、 c_{tz} 、 δ_x'' を定める。 c_{tx} 、 c_{ty} 、 c_{tz} はいったん定めれば(62)(63)式でも共通なので、その後に E_{0y}'' 、 δ_y'' 、 E_{0z}'' 、 δ_z'' を定めるのはより容易いであろう。

境界条件(49)式を成り立たせることを条件として課す。(61)式に $z = 0$ を代入した

$$E_{x(z=0)}'' = E_{0x}'' \sin \left[\omega t - \frac{\omega c_{tx} x}{c_2^2} - \frac{\omega c_{ty} y}{c_2^2} + \delta_x'' \right]$$

が(49)式に等しいとすると

$$E_{0x}'' = \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \quad , \quad c_{tx} = \frac{c_2^2}{c_1} \sin \theta \quad , \quad c_{ty} = 0 \quad , \quad \delta_x'' = \xi_e$$

と定まる。この結果を使うと、(64)式より

$$c_{tz}^2 = c_2^2 \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta \right)$$

となるが、全反射が起こっている場合には $\frac{c_2}{c_1} \sin \theta > 1$ が成立しているので、 c_{tz} は虚数になってしまう。

ひとまずそれを認めることにすると、虚数単位を i として

$$c_{tz} = \pm i c_2 \sqrt{\frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta - 1}$$

である。

これで、Maxwell 方程式を満たす E_x'' の解のうち、全反射の場合に境界条件を満たすもの（特殊解）として

$$E_{x\text{par}\mp}'' = \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \mp i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z + \xi_e \right]$$

の 2 つ ($E_{x\text{par}-}''$ と $E_{x\text{par}+}''$) が存在することが導かれた。実際には、両者の線形結合

$$\begin{aligned} E_{x\text{par}}'' &= A E_{x\text{par}-}'' + B E_{x\text{par}+}'' \\ &= A \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x - i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z + \xi_e \right] \\ &\quad + B \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z + \xi_e \right] \end{aligned}$$

(A 、 B は任意の定数) も Maxwell 方程式を満たし、 $A + B = 1$ という条件を課せば、境界条件も満たす。

$E_{x\text{par}}''$ は、変形すると

$$\begin{aligned} E_{x\text{par}}'' &= \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \\ &\quad \times \left(A \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x - i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z + \xi_e \right] \right. \\ &\quad \left. + B \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z + \xi_e \right] \right) \\ &= \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \\ &\quad \times \left(A \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \cos \left[i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \right. \\ &\quad \left. - A \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \sin \left[i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \right. \\ &\quad \left. + B \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \cos \left[i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \right. \\ &\quad \left. + B \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \sin \left[i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \right) \\ &= \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \\ &\quad \times \left((A + B) \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \cos \left[i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \right. \\ &\quad \left. + (B - A) \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \sin \left[i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \right) \end{aligned}$$

となる。実数 ψ に対して $\cos[i\psi] = \frac{e^{-\psi} + e^\psi}{2} = \cosh \psi$ 、 $\sin[i\psi] = \frac{e^{-\psi} - e^\psi}{2i} = i \sinh \psi$ であるから、これは一般に複素数である。

しかしながら、 $E_x''_{\text{par}}$ には、実数の解も含まれている。その 1 つは $A = B$ とした場合であって、 $A + B = 1$ も考慮して

$$\begin{aligned} E_x''_{\text{par}(A=B)} &= \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \cos \left[i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\ &= \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \cosh \left[\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \end{aligned}$$

である。これが、Maxwell 方程式を満たし、境界条件 (49) 式も満たす、実数の E_x'' の解（の 1 つ）である。

この $E_x''_{\text{par}(A=B)}$ が物理的な意味を持つことが期待されるが、残念ながら、それに対する答えは「否」である。なぜなら、 z の増加にともなって $\cosh \left[\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right]$ は単調に増加し、 $z \rightarrow \infty$ の極限で無限大に発散するからである。それは透過側の媒質中に境界面から離れるほど振幅が増大するような振動電場が発生するということであり、あり得ないことがある。よって、 $E_x''_{\text{par}(A=B)}$ を実際の現象を表す式と考えることはできない。

続けて、次のように考える。

Maxwell 方程式を満たす E_x'' の解は、境界条件を満たさないものならば、まだ無数にある。それらのうち境界面で $E_x'' = 0$ となるもの（「境界零解」と呼ぶことにする）を $E_x''_{\text{par}(A=B)}$ に加えたものも、やはり、 $E_x''_{\text{par}(A=B)}$ と同じく、Maxwell 方程式と境界条件の両方を満たす。そこで、 $E_x''_{\text{par}(A=B)}$ に適当な境界零解を加えた関数で、物理的な意味を持つ E_x'' の解がないかどうかを探す。

次のような関数が見つかる。

境界零解として、次の 2 つの関数（ $E_{x\cos-}''$ と $E_{x\cos+}''$ ）の線形結合 $E_x''_{\text{hom}} = \frac{i}{2} E_{x\cos-}'' - \frac{i}{2} E_{x\cos+}''$ を選ぶ。

$$E_{x\cos\mp}'' = \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \mp i \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z + \xi_e \right]$$

\cos は \sin の位相をずらしただけの関数であることに留意すると、 $E_{x\cos-}''$ と $E_{x\cos+}''$ はどちらも (61) 式と同じ形でかつ (64) 式を満たしており、ゆえに Maxwell 方程式を満たすと言える。これらを使って得る

$$\begin{aligned} E_x''_{\text{hom}} &= \frac{i}{2} E_{x\cos-}'' - \frac{i}{2} E_{x\cos+}'' \\ &= -\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \sinh \left[\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \end{aligned}$$

は、 $z = 0$ で 0 となる。

この 境界零解 $E_x''_{\text{hom}}$ をさきほどの 特殊解 $E_x''_{\text{par}(A=B)}$ に加えた関数を E_x'' とすると

$$\begin{aligned} E_x'' &= E_x''_{\text{par}(A=B)} + E_x''_{\text{hom}} \\ &= \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta_M'} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \end{aligned} \quad (65)$$

である。この E_x'' は

- Maxwell 方程式を満たし
- 境界条件を満たし
- 値が実数であり
- z の増加にともなって 0 に収束する

ような関数である。これは、現実の電場の式である可能性のある関数である。

これを、全反射が起こっている場合の透過側の媒質中の電場の x 成分を表す式とする。

なお、(65) 式で表される x 成分（および、以下に述べる y 成分・ z 成分）を持つような電場が実際に生じることは、実験により確かめられている。

次に、 y 成分 (62) 式について考察し、 E_{0y}'' 、 δ_y'' を定める。

境界条件 (50) 式を成り立たせることを条件として課し、(62) 式に $z = 0$ を代入した式が (50) 式に等しいとすることから出発して、 x 成分と同様の議論を展開すると、電場の y 成分 E_y'' について

$$E_{0y}'' = \sqrt{E_\perp^2 + E_\perp'^2 + 2 E_\perp E_\perp' \cos \delta'_E} \quad , \quad \delta_y'' = \eta_e$$

$$E_y'' = \sqrt{E_\perp^2 + E_\perp'^2 + 2 E_\perp E_\perp' \cos \delta'_E} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \quad (66)$$

が得られる。

最後に、 z 成分 (63) 式について考察し、 E_{0z}'' 、 δ_z'' を定める。

境界条件 (51) 式を成り立たせることを条件として課し、(63) 式に $z = 0$ を代入した式が (51) 式に等しいとすることから出発して、 x 成分と同様の議論を展開すると、電場の z 成分 E_z'' について

$$E_{0z}'' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{E_\parallel^2 + E_\parallel'^2 - 2 E_\parallel E_\parallel' \cos \delta'_M} \sin \theta \quad , \quad \delta_z'' = \zeta_e$$

$$E_z'' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{E_\parallel^2 + E_\parallel'^2 - 2 E_\parallel E_\parallel' \cos \delta'_M} \sin \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \zeta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \quad (67)$$

が得られる。

以上で、透過側の媒質中の電場 \mathbf{E}'' が得られた。3つの成分をまとめると、こうなる。

$$\mathbf{E}'' = \begin{pmatrix} \sqrt{E_\parallel^2 + E_\parallel'^2 + 2 E_\parallel E_\parallel' \cos \delta'_M} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\ \sqrt{E_\perp^2 + E_\perp'^2 + 2 E_\perp E_\perp' \cos \delta'_E} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{E_\parallel^2 + E_\parallel'^2 - 2 E_\parallel E_\parallel' \cos \delta'_M} \sin \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \zeta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \end{pmatrix} \quad (68)$$

13.7 透過側の媒質中の磁場

Maxwell 方程式 (1) 式を使って、 \mathbf{E}'' から、 \mathbf{r} の関数としての \mathbf{H}'' を求める。

(68) 式より $\nabla \times \mathbf{E}''$ を計算すると

$$\begin{aligned}
& (\nabla \times \mathbf{E}'')_x \\
&= \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
& (\nabla \times \mathbf{E}'')_y \\
&= -\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
& \quad + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin \theta \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \zeta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
& (\nabla \times \mathbf{E}'')_z \\
&= -\frac{\omega}{c_1} \sin \theta \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right]
\end{aligned}$$

となる。

(1) 式より $\nabla \times \mathbf{E}''$ が $-\mu_2 \frac{\partial \mathbf{H}''}{\partial t}$ に等しいので $\mathbf{H}'' = -\frac{1}{\mu_2} \int \nabla \times \mathbf{E}'' dt$ (積分は \mathbf{r} を定数とみなして行う) である。積分定数は静磁場成分なので $\mathbf{0}$ とすると

$$\begin{aligned}
& H_x'' \\
&= \frac{1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right]
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
& H_y'' \\
&= -\frac{1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \cos \theta \\
& \quad \times \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
& \quad - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{1}{c_1 \mu_2} \sin \theta \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \zeta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right]
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
& H_z'' \\
&= \frac{1}{c_1 \mu_2} \sin \theta \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right]
\end{aligned} \tag{71}$$

である。

以上で、透過側の媒質中の磁場 \mathbf{H}'' が得られた。

13.8 冗長な変数の消去、境界条件の式の整理

13.4で羅列した境界条件の式(49) (50) (51) (55) (56) (57)式から余計な文字を消去し、見やすく整理しておく。

第1に、(55) (56) (57)式の H_{\perp} 、 H_{\parallel} 、 H_{\perp}' 、 H_{\parallel}' に(10)式を代入して E_{\perp} 、 E_{\parallel} 、 E_{\perp}' 、 E_{\parallel}' に置き換える。

(55) (58)式に(10)式の $H_{\parallel} = -\frac{E_{\perp}}{c_1 \mu_1}$ 、 $H_{\parallel}' = \frac{E_{\perp}'}{c_1 \mu_1}$ を代入すると

$$H_x''_{(z=0)} = \frac{1}{c_1 \mu_1} \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 - 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \cos \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta x + \xi_m \right] \quad (72)$$

$$\sin \xi_m = \frac{E_{\perp}' \sin \delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 - 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}}, \quad \cos \xi_m = \frac{-E_{\perp} + E_{\perp}' \cos \delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 - 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}} \quad (73)$$

である。

(56) (59)式に(10)式の $H_{\perp} = \frac{E_{\parallel}}{c_1 \mu_1}$ 、 $H_{\perp}' = -\frac{E_{\parallel}'}{c_1 \mu_1}$ を代入すると

$$H_y''_{(z=0)} = \frac{1}{c_1 \mu_1} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta x + \eta_m \right] \quad (74)$$

$$\sin \eta_m = \frac{-E_{\parallel}' \sin \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}}, \quad \cos \eta_m = \frac{E_{\parallel} - E_{\parallel}' \cos \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}} \quad (75)$$

である。

ここで、(75)式を(54)式と比較すると

$$\zeta_e = \eta_m + \pi \quad (76)$$

であることがわかる。

(57) (60)式に(10)式の $H_{\parallel} = -\frac{E_{\perp}}{c_1 \mu_1}$ 、 $H_{\parallel}' = \frac{E_{\perp}'}{c_1 \mu_1}$ を代入すると

$$H_z''_{(z=0)} = \frac{1}{c_1 \mu_2} \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \sin \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta x + \zeta_m \right] \quad (77)$$

$$\sin \zeta_m = \frac{E_{\perp}' \sin \delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}}, \quad \cos \zeta_m = \frac{E_{\perp} + E_{\perp}' \cos \delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}} \quad (78)$$

である。

ここで、(78)式を(53)式と比較すると

$$\zeta_m = \eta_e \quad (79)$$

であることがわかる。

第2に、(76) (79)式を可能な箇所に適用し、文字の数を減らす。

(76)式を(51)式に代入すると

$$\begin{aligned} E_z''_{(z=0)} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m + \pi \right] \\ &= -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \end{aligned} \quad (80)$$

となる。

(79)式を(77)式に代入すると

$$H_z''_{(z=0)} = \frac{1}{c_1 \mu_2} \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \sin \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta x + \eta_e \right] \quad (81)$$

となる。

第3に、以上の結果を踏まえて、13.4の境界条件の式(49)(50)(51)(55)(56)(57)式を整理したものを、ふたたび書き並べる。

TE波にかかわるのは(50)(55)(57)式の3つであったが、整理の結果、次の3つになる。

磁場のx成分(72)式。電場のy成分(50)式。磁場のz成分(81)式。

$$(72) \text{式: } H_x''_{(z=0)} = \frac{1}{c_1 \mu_1} \sqrt{E_\perp^2 + E_\perp'^2 - 2 E_\perp E_\perp' \cos \delta'_E} \cos \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta x + \xi_m \right] \quad (82)$$

$$(50) \text{式: } E_y''_{(z=0)} = \sqrt{E_\perp^2 + E_\perp'^2 + 2 E_\perp E_\perp' \cos \delta'_E} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta x + \eta_e \right] \quad (83)$$

$$(81) \text{式: } H_z''_{(z=0)} = \frac{1}{c_1 \mu_2} \sqrt{E_\perp^2 + E_\perp'^2 + 2 E_\perp E_\perp' \cos \delta'_E} \sin \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta x + \eta_e \right] \quad (84)$$

ただし

$$\sin \xi_m = \frac{E_\perp' \sin \delta'_E}{\sqrt{E_\perp^2 + E_\perp'^2 - 2 E_\perp E_\perp' \cos \delta'_E}}, \quad \cos \xi_m = \frac{-E_\perp + E_\perp' \cos \delta'_E}{\sqrt{E_\perp^2 + E_\perp'^2 - 2 E_\perp E_\perp' \cos \delta'_E}} \quad (85)$$

$$\sin \eta_e = \frac{E_\perp' \sin \delta'_E}{\sqrt{E_\perp^2 + E_\perp'^2 + 2 E_\perp E_\perp' \cos \delta'_E}}, \quad \cos \eta_e = \frac{E_\perp + E_\perp' \cos \delta'_E}{\sqrt{E_\perp^2 + E_\perp'^2 + 2 E_\perp E_\perp' \cos \delta'_E}} \quad (86)$$

である。

TM波にかかわるのは(49)(51)(56)式の3つであったが、整理の結果、次の3つになる。

電場のx成分(49)式。磁場のy成分(74)式。電場のz成分(80)式。

$$(49) \text{式: } E_x''_{(z=0)} = \sqrt{E_\parallel^2 + E_\parallel'^2 + 2 E_\parallel E_\parallel' \cos \delta'_M} \cos \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta x + \xi_e \right] \quad (87)$$

$$(74) \text{式: } H_y''_{(z=0)} = \frac{1}{c_1 \mu_1} \sqrt{E_\parallel^2 + E_\parallel'^2 - 2 E_\parallel E_\parallel' \cos \delta'_M} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta x + \eta_m \right] \quad (88)$$

$$(80) \text{式: } E_z''_{(z=0)} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{E_\parallel^2 + E_\parallel'^2 - 2 E_\parallel E_\parallel' \cos \delta'_M} \sin \theta \cdot \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta x + \eta_m \right] \quad (89)$$

ただし

$$\sin \xi_e = \frac{E_\parallel' \sin \delta'_M}{\sqrt{E_\parallel^2 + E_\parallel'^2 + 2 E_\parallel E_\parallel' \cos \delta'_M}}, \quad \cos \xi_e = \frac{E_\parallel + E_\parallel' \cos \delta'_M}{\sqrt{E_\parallel^2 + E_\parallel'^2 + 2 E_\parallel E_\parallel' \cos \delta'_M}} \quad (90)$$

$$\sin \eta_m = \frac{-E_\parallel' \sin \delta'_M}{\sqrt{E_\parallel^2 + E_\parallel'^2 - 2 E_\parallel E_\parallel' \cos \delta'_M}}, \quad \cos \eta_m = \frac{E_\parallel - E_\parallel' \cos \delta'_M}{\sqrt{E_\parallel^2 + E_\parallel'^2 - 2 E_\parallel E_\parallel' \cos \delta'_M}} \quad (91)$$

である。

13.9 反射波の電場

(69) (71) (70) 式に $z = 0$ を代入したもののそれぞれと (82) (84) (88) 式のそれぞれとが等しいとおいて方程式とする。それを解いて E_{\perp}' 、 δ'_E 、 E_{\parallel}' 、 δ'_M を求める。

TE 波

第 1 に、磁場の z 成分の境界条件を使おうとしてみる。

(84) 式は (71) 式に $z = 0$ を代入したものと全く同じ式である。結局、(84) 式と (71) 式は E_{\perp}' 、 δ'_E を求めるのに不要である。

第 2 に、磁場の x 成分の境界条件を使う。

(82) 式を、(69) 式に $z = 0$ を代入した式に等しいものとおくと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_1 \mu_2} \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \\ &= \frac{1}{c_1 \mu_1} \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 - 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_m \right] \\ & \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 - 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_m \right] \end{aligned} \quad (92)$$

という方程式が得られる。

この等式が t によらず成り立つためには

$$\xi_m = \eta_e + \frac{\pi}{2} \quad (93)$$

でなければならない。

したがって

$$\sin \xi_m = \sin \left[\eta_e + \frac{\pi}{2} \right] = \cos \eta_e$$

かつ

$$\cos \xi_m = \cos \left[\eta_e + \frac{\pi}{2} \right] = -\sin \eta_e$$

であるから

$$\frac{\sin \xi_m}{\cos \xi_m} = \frac{\cos \eta_e}{-\sin \eta_e}$$

(85) 式と (86) 式を代入して

$$\begin{aligned} \frac{E_{\perp}' \sin \delta'_E}{-E_{\perp} + E_{\perp}' \cos \delta'_E} &= \frac{E_{\perp} + E_{\perp}' \cos \delta'_E}{-E_{\perp}' \sin \delta'_E} \\ -E_{\perp}'^2 \sin^2 \delta'_E &= E_{\perp}'^2 \cos^2 \delta'_E - E_{\perp}^2 \\ E_{\perp}^2 &= E_{\perp}'^2 \\ E_{\perp}' &= \pm E_{\perp} \end{aligned} \quad (94)$$

を得る。

(93) 式と (94) 式を (92) 式に代入して、複号同順で

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{2 E_{\perp}^2 (1 \pm \cos \delta'_E)} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \\ = \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{2 E_{\perp}^2 (1 \mp \cos \delta'_E)} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e + \frac{\pi}{2} \right] \\ \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{2 E_{\perp}^2 (1 \pm \cos \delta'_E)} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \\ = \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{2 E_{\perp}^2 (1 \mp \cos \delta'_E)} \cos \theta \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \\ \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{1 \pm \cos \delta'_E} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{1 \mp \cos \delta'_E} \cos \theta \\ \left(\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) (1 \pm \cos \delta'_E) = \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} (1 \mp \cos \delta'_E) \cos^2 \theta \\ \pm \left(\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \cos^2 \theta \right) \cos \delta'_E = -\sin^2 \theta + \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}$ であることを考慮して

$$\begin{aligned} \cos \delta'_E &= \pm \frac{-\sin^2 \theta + \varepsilon_{12} \mu_{12} + \mu_{12}^2 \cos^2 \theta}{+\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12} + \mu_{12}^2 \cos^2 \theta} \\ \cos \delta'_E &= \pm \frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \end{aligned} \quad (95)$$

を得る。

ここで、複号同順により (94) 式の符号と (95) 式の符号が対応しているから、 E_{\perp}' と δ'_E は

$$E_{\perp}' = +E_{\perp} \quad \text{かつ} \quad \cos \delta'_E = +\frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \quad (\text{この } \delta'_E \text{ の値を } \delta'_{E(+)} \text{ とおく})$$

または

$$E_{\perp}' = -E_{\perp} \quad \text{かつ} \quad \cos \delta'_E = -\frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \quad (\text{この } \delta'_E \text{ の値を } \delta'_{E(-)} \text{ とおく})$$

の 2 通りとなるが、13.3 の最初に記した $E_y'_{(z=0)} = E_{\perp}' \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) + \delta'_E \right]$ まで戻って考えると、後者は

$$E_{\perp}' = +E_{\perp} \quad \text{かつ} \quad \delta'_E = \delta'_{E(-)} + \pi$$

と表現してもよいことがわかる。 $(\delta'_{E(-)} + \pi)$ は $\delta'_{E(+)}$ であるから、 E_{\perp}' と δ'_E の解はすべて前者の表現で表されると言ってよい。よって、上記のうちの「前者だけ」が、 E_{\perp}' と $\cos \delta'_E$ の結論である。

これで E_{\perp}' と δ'_E が定まったような気もするが、 δ'_E はまだ定まっていない。 δ'_E を定めるには、 $\cos \delta'_E$ だけでなく $\sin \delta'_E$ も同時に定める必要がある。

E_{\parallel}' と $\cos \delta'_E$ がわかっているので、すでに使った

$$\sin \xi_m = \cos \eta_e$$

の関係から $\sin \delta'_E$ が求まる。(85) 式と (86) 式を代入して

$$\begin{aligned} \frac{E_{\perp}' \sin \delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 - 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}} &= \frac{E_{\perp} + E_{\perp}' \cos \delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}} \\ \sin \delta'_E &= \frac{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 - 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}} \frac{E_{\perp} + E_{\perp}' \cos \delta'_E}{E_{\perp}'} \end{aligned}$$

$E_{\perp}' = E_{\perp}$ 、 $\cos \delta'_E = \frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \sin \delta'_E &= \frac{\sqrt{1 - \frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}}}{\sqrt{1 + \frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}}} \left(1 + \frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta}} \cdot \frac{2 \mu_{12}^2 \cos^2 \theta}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \\ &= \frac{2 \mu_{12} \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \end{aligned}$$

となる。

以上より、最終的な結論は、次である。

$$E_{\perp}' = E_{\perp} \tag{96}$$

$$\cos \delta'_E = \frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \tag{97}$$

$$\sin \delta'_E = \frac{2 \mu_{12} \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \tag{98}$$

これで、TE 波の反射波の電場が求まった。

なお、 θ が臨界角 ($\sin \theta = \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12}}$) から $\frac{\pi}{2}$ まで変化するとき、(97) (98) 式より、 $\cos \delta'_E$ は 1 から -1 まで変化し、 $\sin \delta'_E$ は 0 から 0 まで変化し途中つねに正である。ゆえに、 δ'_E は 0 から π まで増加し途中つねに正である。

第 3 に、磁場の y 成分の境界条件を使う。

(88) 式を、(70) 式に $z = 0$ と (76) 式を代入した式に等しいものとおくと

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{c_1 \mu_2} \left(-\sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \cos \theta \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \right) \\
 & = \frac{1}{c_1 \mu_1} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \\
 & - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \cos \theta \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right] \\
 & \quad + \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin^2 \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \\
 & = \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \\
 & \left(\sin^2 \theta - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right) \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \\
 & = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \cos \theta \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right]
 \end{aligned}$$

$\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} = \frac{c_1^2}{c_2^2}$ であることを考慮して

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \\
 & = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} \cos \theta \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \xi_e \right]
 \end{aligned} \tag{99}$$

という方程式が得られる。

この等式が t によらず成り立つためには

$$\xi_e = \eta_m - \frac{\pi}{2} \quad (100)$$

でなければならない。

したがって

$$\sin \xi_e = \sin \left[\eta_m - \frac{\pi}{2} \right] = -\cos \eta_m$$

かつ

$$\cos \xi_e = \cos \left[\eta_m - \frac{\pi}{2} \right] = \sin \eta_m$$

であるから

$$\frac{\sin \xi_e}{\cos \xi_e} = \frac{-\cos \eta_m}{\sin \eta_m}$$

(90) 式と (91) 式を代入して

$$\begin{aligned} \frac{E_{\parallel}' \sin \delta'_M}{E_{\parallel} + E_{\parallel}' \cos \delta'_M} &= \frac{-E_{\parallel} + E_{\parallel}' \cos \delta'_M}{-E_{\parallel}' \sin \delta'_M} \\ -E_{\parallel}'^2 \sin^2 \delta'_M &= E_{\parallel}'^2 \cos^2 \delta'_M - E_{\parallel}^2 \\ E_{\parallel}^2 &= E_{\parallel}'^2 \\ E_{\parallel}' &= \pm E_{\parallel} \end{aligned} \quad (101)$$

を得る。

(100) 式と (101) 式を (99) 式に代入して、複号同順で

$$\begin{aligned} &\sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{2 E_{\parallel}^2 (1 \mp \cos \delta'_M)} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \\ &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sqrt{2 E_{\parallel}^2 (1 \pm \cos \delta'_M)} \cos \theta \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m - \frac{\pi}{2} \right] \\ &\sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{2 E_{\parallel}^2 (1 \mp \cos \delta'_M)} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \\ &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sqrt{2 E_{\parallel}^2 (1 \pm \cos \delta'_M)} \cos \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \\ &\sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{1 \mp \cos \delta'_M} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sqrt{1 \pm \cos \delta'_M} \cos \theta \\ \left(\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) (1 \mp \cos \delta'_M) &= \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} (1 \pm \cos \delta'_M) \cos^2 \theta \\ \mp \left(\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \cos^2 \theta \right) \cos \delta'_M &= -\sin^2 \theta + \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}$ であることを考慮して

$$\begin{aligned} \cos \delta'_M &= \mp \frac{-\sin^2 \theta + \varepsilon_{12} \mu_{12} + \varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta}{+\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12} + \varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta} \\ \cos \delta'_M &= \mp \frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \end{aligned} \quad (102)$$

を得る。

ここで、複号同順により (101) 式の符号と (102) 式の符号が対応しているから、 E_{\parallel}' と δ'_M は

$$E_{\parallel}' = +E_{\parallel} \quad \text{かつ} \quad \cos \delta'_M = -\frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \quad (\text{この } \delta'_M \text{ の値を } \delta'_{M(+)} \text{ とおく})$$

または

$$E_{\parallel}' = -E_{\parallel} \quad \text{かつ} \quad \cos \delta'_M = +\frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \quad (\text{この } \delta'_M \text{ の値を } \delta'_{M(-)} \text{ とおく})$$

の 2 通りとなるが、13.3 の最初に記した $E_x'(z=0) = E_{\parallel}' \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{\sin \theta}{c_1} x \right) + \delta'_M \right]$ まで戻って考えると、後者は

$$E_{\parallel}' = +E_{\parallel} \quad \text{かつ} \quad \delta'_M = \delta'_{M(-)} + \pi$$

と表現してもよいことがわかる。 $(\delta'_{M(-)} + \pi)$ は $\delta'_{M(+)}$ であるから、 E_{\parallel}' と δ'_M の解はすべて前者の表現で表されると言ってよい。よって、上記のうちの「前者だけ」が、 E_{\parallel}' と $\cos \delta'_M$ の結論である。

これで E_{\parallel}' と δ'_M が定まったような気もするが、 δ'_M はまだ定まっていない。 δ'_M を定めるには、 $\cos \delta'_M$ だけでなく $\sin \delta'_M$ も同時に定める必要がある。

E_{\parallel}' と $\cos \delta'_M$ がわかっているので、すでに使った

$$\sin \xi_e = -\cos \eta_m$$

の関係から $\sin \delta'_M$ が求まる。(90) 式と (91) 式を代入して

$$\begin{aligned} \frac{E_{\parallel}' \sin \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}} &= -\frac{E_{\parallel} - E_{\parallel}' \cos \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}} \\ \sin \delta'_M &= \frac{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 + 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M} - E_{\parallel} + E_{\parallel}' \cos \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}} \end{aligned}$$

$E_{\parallel}' = E_{\parallel}$ 、 $\cos \delta'_M = -\frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \sin \delta'_M &= \frac{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}}} \left(-1 - \frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta}} \cdot \frac{-2 \varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \\ &= -\frac{2 \varepsilon_{12} \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \end{aligned}$$

となる。

以上より、最終的な結論は、次である。

$$E_{\parallel}' = E_{\parallel} \quad (103)$$

$$\cos \delta'_M = -\frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \quad (104)$$

$$\sin \delta'_M = -\frac{2 \varepsilon_{12} \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \quad (105)$$

これで、TM 波の反射波の電場が求まった。

なお、 θ が臨界角 ($\sin \theta = \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12}}$) から $\frac{\pi}{2}$ まで変化するとき、(104) (105) 式より、 $\cos \delta'_M$ は -1 から 1 まで変化し、 $\sin \delta'_M$ は 0 から 0 まで変化し途中つねに負である。ゆえに、 δ'_M は $-\pi$ から 0 まで増加し途中つねに負である。

13.10 現実の場合

全反射の場合の反射波の電場は (96) (97) (98) 式および (103) (104) (105) 式に従う、という最終的な結論が得られた。

現実の物質では、 $\mu_{12} = 1$ とみなせるとすると

TE 波

$$E_{\perp}' = E_{\perp}$$

$$\cos \delta'_E = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \varepsilon_{12}}{1 - \varepsilon_{12}}$$

$$\sin \delta'_E = \frac{2 \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12}}}{1 - \varepsilon_{12}}$$

TM 波

$$E_{\parallel}' = E_{\parallel}$$

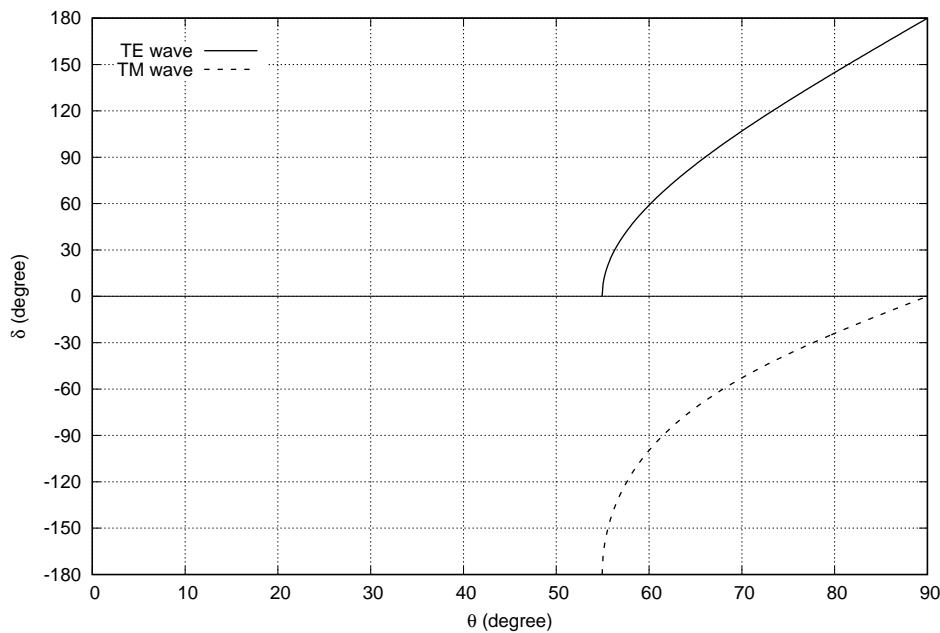
$$\cos \delta'_M = \frac{-\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - \varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - \varepsilon_{12}}$$

$$\sin \delta'_M = \frac{-2 \varepsilon_{12} \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12}}}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - \varepsilon_{12}}$$

となる。

全反射が起こる場合（入射角 θ が $\sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12}} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす場合）に、入射角 θ に依存して反射波の位相のずれ δ'_E より δ'_M がどう変化するかをグラフで表すと、下図のようになる。下図は、 $\mu_{12} = 1$ の仮定の下で、 θ を横軸にとり、 $\varepsilon_{12} = 0.67$ の場合の δ'_E と δ'_M を縦軸にとって描いたグラフである。実線が δ'_E 、破線が δ'_M である。

Phase shift of reflected wave ($\varepsilon_2 / \varepsilon_1 = 0.67$, $\mu_2 / \mu_1 = 1.00$)



13.11 エヴァネッセント波

全反射の場合に透過側の媒質中に生じる電場と磁場の波をエヴァネッセント波と呼ぶ。

エヴァネッセント波の電場は(65)(66)(67)式、磁場は(69)(70)(71)式である。(96)(103)(76)(100)式を代入したものを書き、さらに(97)(104)式を代入して整理すれば

$$\begin{aligned}
E_x'' &= -\sqrt{2 E_{\parallel}^2} \sqrt{1 + \cos \delta_M'} \cos \theta \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&= -\sqrt{2 E_{\parallel}^2} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \cos \theta \\
&\quad \times \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&= -2 \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \cos \theta \sqrt{E_{\parallel}^2} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
E_y'' &= \sqrt{2 E_{\perp}^2} \sqrt{1 + \cos \delta_E'} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&= \sqrt{2 E_{\perp}^2} \sqrt{1 + \frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&= 2 \mu_{12} \sqrt{\frac{1}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \cos \theta \sqrt{E_{\perp}^2} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
E_z'' &= -\frac{1}{\varepsilon_{12}} \sqrt{2 E_{\parallel}^2} \sqrt{1 - \cos \delta_M'} \sin \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_{12}} \sqrt{2 E_{\parallel}^2} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \sin \theta \\
&\quad \times \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&= -2 \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \sin \theta \cos \theta \\
&\quad \times \sqrt{E_{\parallel}^2} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_x'' &= \frac{1}{c_1 \mu_2} \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{2 E_{\perp}^2} \sqrt{1 + \cos \delta'_E} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&= \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\mu_2} \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}} \sqrt{2 E_{\perp}^2} \sqrt{1 + \frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \\
&\quad \times \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&= 2 \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} E_{\perp}^2} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
H_y'' &= \frac{1}{c_1 \mu_2} \sqrt{2 E_{\parallel}^2} \left(-\sqrt{\sin^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \sqrt{1 + \cos \delta'_M} \cos \theta \right. \\
&\quad \times \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_{12}} \sqrt{1 - \cos \delta'_M} \sin^2 \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \right) \\
&= \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\mu_2} \sqrt{2 E_{\parallel}^2} \left(-\sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \cos \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_{12}} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \sin^2 \theta \right) \\
&\quad \times \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&= 2 \varepsilon_{12} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \cos \theta \\
&\quad \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} E_{\parallel}^2} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_m \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
H_z'' &= \frac{1}{c_1 \mu_2} \sqrt{2 E_{\perp}^2} \sqrt{1 + \cos \delta'_E} \sin \theta \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&= \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\mu_2} \sqrt{2 E_{\perp}^2} \sqrt{1 + \frac{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \sin \theta \\
&\quad \times \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
&= 2 \sqrt{\frac{1}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \sin \theta \cos \theta \\
&\quad \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} E_{\perp}^2} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \eta_e \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right]
\end{aligned}$$

である。

η_e と η_m は (86) (91) 式により与えられるが、それらは E_{\perp}' と E_{\parallel}' を用いた表式であり、いま、 E_{\perp}' と E_{\parallel}' はすでに (96) (103) 式として得られているので、それを考慮に入れてより単純な表式を求めておく。

(86) 式と (96) 式を使うと

$$\begin{aligned}\sin[2\eta_e] &= 2 \sin \eta_e \cos \eta_e \\&= 2 \frac{E_{\perp}' \sin \delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}} \frac{E_{\perp} + E_{\perp}' \cos \delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}} \\&= \sin \delta'_E \\ \cos[2\eta_e] &= 1 - 2 \sin^2 \eta_e \\&= 1 - 2 \left(\frac{E_{\perp}' \sin \delta'_E}{\sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\perp}'^2 + 2 E_{\perp} E_{\perp}' \cos \delta'_E}} \right)^2 \\&= \cos \delta'_E\end{aligned}$$

が得られる。

(91) 式と (103) 式を使うと

$$\begin{aligned}\sin[2\eta_m] &= 2 \sin \eta_m \cos \eta_m \\&= 2 \frac{-E_{\parallel}' \sin \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}} \frac{E_{\parallel} - E_{\parallel}' \cos \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}} \\&= -\sin \delta'_M \\ \cos[2\eta_m] &= 1 - 2 \sin^2 \eta_m \\&= 1 - 2 \left(\frac{-E_{\parallel}' \sin \delta'_M}{\sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\parallel}'^2 - 2 E_{\parallel} E_{\parallel}' \cos \delta'_M}} \right)^2 \\&= -\cos \delta'_M\end{aligned}$$

が得られる。

これらより

$$\eta_e = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta'_E & (E_{\perp} > 0) \\ \frac{1}{2} \delta'_E + \pi & (E_{\perp} < 0) \end{cases} \quad (106)$$

$$\eta_m = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta'_M + \frac{\pi}{2} & (E_{\parallel} > 0) \\ \frac{1}{2} \delta'_M - \frac{\pi}{2} & (E_{\parallel} < 0) \end{cases} \quad (107)$$

であることがわかる。ただし、 $0 \leq \delta'_E \leq \pi$ および $-\pi \leq \delta'_M \leq 0$ であることに留意する。

先に得た E_x'' 、 E_y'' 、 E_z'' 、 H_x'' 、 H_y'' 、 H_z'' に (106) (107) 式を代入し、結果だけを並べると

$$E_x'' = 2 \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \cos \theta \\ \times \sqrt{E_{\parallel}^2} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_M \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \quad (108)$$

$$E_y'' = 2 \mu_{12} \sqrt{\frac{1}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \cos \theta \\ \times \sqrt{E_{\perp}^2} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_E \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \quad (109)$$

$$E_z'' = -2 \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \sin \theta \cos \theta \\ \times \sqrt{E_{\parallel}^2} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_M \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \quad (110)$$

$$H_x'' = 2 \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \cos \theta \\ \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} E_{\perp}^2} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_E \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \quad (111)$$

$$H_y'' = 2 \varepsilon_{12} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \cos \theta \\ \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} E_{\parallel}^2} \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_M \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \quad (112)$$

$$H_z'' = 2 \sqrt{\frac{1}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})}} \sin \theta \cos \theta \\ \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} E_{\perp}^2} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_E \right] \exp \left[-\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \quad (113)$$

である。ただし、 E_y'' 、 H_x'' 、 H_z'' の表式は E_{\perp} が正である場合のもので、 E_{\perp} が負である場合には符号が反転する。また、 E_x'' 、 E_z'' 、 H_y'' の表式は E_{\parallel} が正である場合のもので、 E_{\parallel} が負である場合には符号が反転する。

13.12 エヴァネッセント波の Poynting ベクトル

TE 波と TM 波のそれぞれについて、エヴァネッセント波の Poynting ベクトルの各成分を求める。

Poynting ベクトル \mathbf{S}'' は

$$\mathbf{S}'' = \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}''$$

である。

以下の表式は、 E_{\perp} および E_{\parallel} が正であるか負であるかによらず、どのような場合でも成り立つ。

TE 波 ($E_{\parallel} = 0$)

$$\begin{aligned}
 S_x'' &= (\mathbf{E}'' \times \mathbf{H}'')_x \\
 &= E_y'' H_z'' \\
 &= \frac{4 \mu_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_E \right] \exp \left[-2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
 &= \frac{2 \mu_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + \delta'_E \right] \right) \exp \left[-2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
 S_y'' &= (\mathbf{E}'' \times \mathbf{H}'')_y = 0 \\
 S_z'' &= (\mathbf{E}'' \times \mathbf{H}'')_z \\
 &= -E_y'' H_x'' \\
 &= -\frac{4 \mu_{12} \cos^2 \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_E \right] \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_E \right] \exp \left[-2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
 &= -\frac{2 \mu_{12} \cos^2 \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + \delta'_E \right] \exp \left[-2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right]
 \end{aligned}$$

TM 波 ($E_{\perp} = 0$)

$$\begin{aligned}
 S_x'' &= (\mathbf{E}'' \times \mathbf{H}'')_x \\
 &= -E_z'' H_y'' \\
 &= \frac{4 \varepsilon_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \cos^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_M \right] \exp \left[-2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
 &= \frac{2 \varepsilon_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \left(1 + \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + \delta'_M \right] \right) \exp \left[-2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
 S_y'' &= (\mathbf{E}'' \times \mathbf{H}'')_y = 0 \\
 S_z'' &= (\mathbf{E}'' \times \mathbf{H}'')_z \\
 &= E_x'' H_y'' \\
 &= \frac{4 \varepsilon_{12} \cos^2 \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_M \right] \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{1}{2} \delta'_M \right] \exp \left[-2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\
 &= \frac{2 \varepsilon_{12} \cos^2 \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + \delta'_M \right] \exp \left[-2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right]
 \end{aligned}$$

この時間平均をとり、エヴァネッセント波による定的なエネルギーの流れを求めるとき、次のようになる。

TE 波	$\left. \begin{aligned} \overline{S_x''} &= \frac{2\mu_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \exp \left[-2\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\ \overline{S_y''} &= 0 \\ \overline{S_z''} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (114)$
------	---

TM 波	$\left. \begin{aligned} \overline{S_x''} &= \frac{2\varepsilon_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \exp \left[-2\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] \\ \overline{S_y''} &= 0 \\ \overline{S_z''} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (115)$
------	---

エヴァネッセント波は z 方向へは定的にエネルギーを運ばないことがわかる。 x 方向へは定的なエネルギーの流れが存在する。

13.13 エネルギーの保存

境界面におけるエネルギーの保存を確かめる。

まず、入射波の Poynting ベクトル \mathbf{S} を求める。(11) (12) 式を用い、(10) 式および $\frac{1}{c_1 \mu_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}$ であることを考慮に入れて

TE 波	$(E_{\parallel} = 0)$
------	-----------------------

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ &= \begin{pmatrix} E_y H_z \\ 0 \\ -E_y H_x \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x - \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x - \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (116)$$

TM 波	$(E_{\perp} = 0)$
------	-------------------

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ &= \begin{pmatrix} -E_z H_y \\ 0 \\ E_x H_y \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x - \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x - \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (117)$$

である。

次に、反射波の Poynting ベクトル \mathbf{S}' を求める。(11) (12) 式を用い、(96) (103) 式の E_{\perp}' 、 E_{\parallel}' を代入し、(10) 式および $\frac{1}{c_1 \mu_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}$ であることを考慮に入れて

TE 波 ($E_{\parallel} = E_{\parallel}' = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}' &= \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' \\ &= \begin{pmatrix} E_y' H_z' \\ 0 \\ -E_y' H_x' \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \cdot \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z + \delta'_E \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \cdot \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z \right) + 2 \delta'_E \right] \right)\end{aligned}$$

TM 波 ($E_{\perp} = E_{\perp}' = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}' &= \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' \\ &= \begin{pmatrix} -E_z' H_y' \\ 0 \\ E_x' H_y' \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \cdot \sin^2 \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z + \delta'_M \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \cdot \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x + \frac{\omega}{c_1} \cos \theta \cdot z \right) + 2 \delta'_M \right] \right)\end{aligned}$$

である。

エヴァネッセント波の Poynting ベクトル \mathbf{S}'' は、すでに求めてある。

以上を使って、境界面上の 面積素片 $d\sigma$ に出入りするエネルギーを考える。

$d\sigma \wedge$ Poynting ベクトル \mathbf{S} の波が入射するとき、 $d\sigma$ の法線と \mathbf{S} との間の角を ψ とすれば、 $d\sigma$ の \mathbf{S} に垂直な面への射影は $d\Sigma = d\sigma \cos \psi$ で、 $d\Sigma$ を単位時間あたり通過するエネルギーが $d\sigma$ へ単位時間あたり入射する。すなわち、 $d\sigma$ へ単位時間あたり入射するエネルギーは $|\mathbf{S}| d\Sigma = |\mathbf{S}| d\sigma \cos \psi$ である。 $|\mathbf{S}| \cos \psi$ は $|S_z|$ に等しいことに留意すると、結局、 $d\sigma$ へ単位時間あたり入射するエネルギーは $|S_z| d\sigma$ であると言える。

よって、境界面上は $z = 0$ であることを考慮に入れて、 $d\sigma$ へ単位時間あたり入射する入射波のエネルギーが

TE 波

$$|S_{z(z=0)}| d\sigma = \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma$$

TM 波

$$|S_{z(z=0)}| d\sigma = \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma$$

であり、 $d\sigma$ から単位時間あたり放射される反射波のエネルギーが

TE 波

$$|S'_{z(z=0)}| d\sigma = \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + 2\delta'_E \right] \right) d\sigma$$

TM 波

$$|S'_{z(z=0)}| d\sigma = \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + 2\delta'_M \right] \right) d\sigma$$

であることが導かれる。

$d\sigma$ に単位時間あたり出入りするエヴァネッセント波のエネルギーも同様に導けるが、それに関しては、 S_z'' が正と負の両方の値をとることに注意しなければならない。 S_z'' が正ならば $d\sigma$ からの透過側の媒質へのエネルギーの放射であり、負ならば $d\sigma$ への透過側の媒質からのエネルギーの入射である。そこで、 $d\sigma$ からの放射を正とし $d\sigma$ への入射を負として符号をつけて表すことになると、 $d\sigma$ に単位時間あたり出入りするエヴァネッセント波のエネルギーは $S_z'' d\sigma$ であり

TE 波

$$S''_{z(z=0)} d\sigma = - \frac{2 \mu_{12} \cos^2 \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + \delta'_E \right] d\sigma$$

TM 波

$$S''_{z(z=0)} d\sigma = \frac{2 \varepsilon_{12} \cos^2 \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + \delta'_M \right] d\sigma$$

となる。

これらより

TE 波

$$\begin{aligned}
& \left| S_{z(z=0)} \right| d\sigma - \left| S_{z'(z=0)} \right| d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + 2\delta'_E \right] \right) d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \left(\cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + 2\delta'_E \right] - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \left(\cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \cos [2\delta'_E] - \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \sin [2\delta'_E] \right. \\
&\quad \left. - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \left((\cos [2\delta'_E] - 1) \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \sin [2\delta'_E] \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \left(-2 \sin^2 \delta'_E \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - 2 \sin \delta'_E \cos \delta'_E \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&= -\cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \sin \delta'_E \left(\sin \delta'_E \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] + \cos \delta'_E \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&= -\cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \sin \delta'_E \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + \delta'_E \right] d\sigma \\
&= -\frac{2\mu_{12} \cos^2 \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + \delta'_E \right] d\sigma \\
&= S_{z''(z=0)} d\sigma
\end{aligned}$$

TM 波

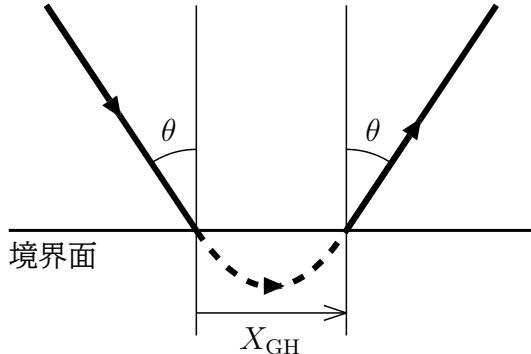
$$\begin{aligned}
& |S_{z(z=0)}| d\sigma - |S_{z'(z=0)}| d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \left(1 - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + 2\delta'_M \right] \right) d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \left(\cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + 2\delta'_M \right] - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \left(\cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \cos [2\delta'_M] - \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \sin [2\delta'_M] \right. \\
&\quad \left. - \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \left((\cos [2\delta'_M] - 1) \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \sin [2\delta'_M] \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \left(-2 \sin^2 \delta'_M \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - 2 \sin \delta'_M \cos \delta'_M \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&= -\cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \sin \delta'_M \left(\sin \delta'_M \cos \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] + \cos \delta'_M \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) \right] \right) d\sigma \\
&= -\cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \sin \delta'_M \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + \delta'_M \right] d\sigma \\
&= \frac{2\varepsilon_{12} \cos^2 \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \sin \left[2 \left(\omega t - \frac{\omega}{c_1} \sin \theta \cdot x \right) + \delta'_M \right] d\sigma \\
&= S_{z''(z=0)} d\sigma
\end{aligned}$$

が示される。

ゆえに、TE 波と TM 波のいずれについても、境界面上のあらゆる点においてエネルギーの保存の成り立っていることが確かめられる。

13.14 Goos-Hänchen シフト

Goos と Hänchen は、1947 年に、全反射の場合には入射波のエネルギーが境界面上の入射した点より少しずれた位置から反射波のエネルギーとして放射されることを実験的に示した。これは、入射波のエネルギーが、いったん透過側の媒質へ入り込み、エヴァネッセント波によって境界面に平行な方向へ運ばれてから入射側の媒質へ戻るためだと説明される。この現象を Goos-Hänchen シフトと呼ぶ。次がその模式図である。



このときの、入射波のエネルギーが入射した境界面上の点から反射波のエネルギーとして放射される境界面上の点までの変位を X_{GH} とする。

X_{GH} を求める。

以下は、R.H.Renard, “Total Reflection: A New Evaluation of the Goos-Hänchen Shift”, *J.Opt.Soc.Am.*, **54**-10, p.1190-1197 (1964) を参考にしている。

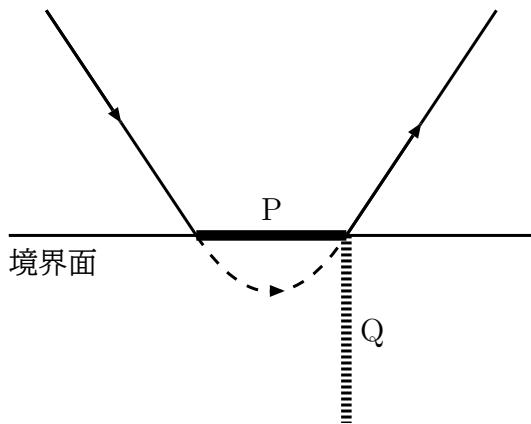
時間平均を見ると $|\bar{S}|$ と $|\bar{S}'|$ は等しい。したがって、定常的には、入射波によって持ち込まれるエネルギーは、すべて反射波によって持ち去られる。つまり、入射波によって運ばれて来て透過側の媒質へ入り込んだエネルギーは、すべて必ず、入射側の媒質へ戻るということである。

このとき、透過側の媒質に入ったエネルギーは必ずその入射した点から境界面上で X_{GH} だけ変位した位置より入射側の媒質に戻るのだと仮定すると、下図に示した領域 P (最も太い実線) に入射したエネルギーのすべてが下図に示した半無限平面 Q (最も太い点線) を通過することになり、また、Q を通過するエネルギーはそれ以外にないということになる。

これより、時間平均で考えて

$$\left(\begin{array}{l} \text{単位時間あたりに P に入射する} \\ \text{入射波のエネルギー} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{単位時間あたりに Q を通過する} \\ \text{エヴァネッセント波のエネルギー} \end{array} \right)$$

という方程式が成り立つことになる。この方程式を成り立たせるという条件より X_{GH} が定まる。



まず、単位時間あたり P に入射する入射波のエネルギーは、P が z 軸に垂直 (x-y 平面に平行) な平面であるから、
 $\iint_{P\text{全体}} \overline{S_{z(z=0)}} dx dy$ である。 $\overline{S_{z(z=0)}}$ は (116) (117) 式より求まるが、x と y によらない定数となるので、そのことを
先に考慮すれば、単位時間あたり P に入射する入射波のエネルギーは $\overline{S_{z(z=0)}} \times (P\text{の面積})$ であることがわかる。ゆえに、
考える領域の y 方向の長さを Y とすれば、P の面積が $X_{GH} Y$ なので

TE 波	$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{単位時間あたりに P に入射する} \\ \text{入射波のエネルギー} \end{array} \right) &= \overline{S_{z(z=0)}} \cdot X_{GH} Y \\ &= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \cdot X_{GH} Y \end{aligned} \tag{118}$
------	---

TM 波	$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{単位時間あたりに P に入射する} \\ \text{入射波のエネルギー} \end{array} \right) &= \overline{S_{z(z=0)}} \cdot X_{GH} Y \\ &= \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \cdot X_{GH} Y \end{aligned} \tag{119}$
------	---

である。

次に、単位時間あたりに Q を通過するエヴァネッセント波のエネルギーは、Q が x 軸に垂直 (y-z 平面に平行) な平面で
あるから、 $\iint_{Q\text{全体}} \overline{S_x''} dy dz$ である。 $\overline{S_x''}$ には (114) (115) 式を代入することができる。よって

TE 波	$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{単位時間あたりに Q を通過する} \\ \text{エヴァネッセント波のエネルギー} \end{array} \right) &= \iint_{Q\text{全体}} \overline{S_x''} dy dz \\ &= \int_{z=0}^{\infty} \int_y \frac{2 \mu_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \exp \left[-2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] dy dz \\ &= \frac{2 \mu_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 Y \frac{1}{2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}} \\ &= \frac{\mu_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \frac{\lambda_1}{2 \pi} Y \end{aligned} \tag{120}$
------	--

TM 波	$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{単位時間あたりに Q を通過する} \\ \text{エヴァネッセント波のエネルギー} \end{array} \right) &= \iint_{Q\text{全体}} \overline{S_x''} dy dz \\ &= \int_{z=0}^{\infty} \int_y \frac{2 \varepsilon_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \exp \left[-2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \cdot z \right] dy dz \\ &= \frac{2 \varepsilon_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 Y \frac{1}{2 \omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}} \\ &= \frac{\varepsilon_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \frac{\lambda_1}{2 \pi} Y \end{aligned} \tag{121}$
------	--

である。ただし、 λ_1 は入射側の媒質中での波長。

(118) 式と (120) 式とが等しいとおき、また、(119) 式と (121) 式とが等しいとおくと

$$\boxed{\text{TE 波}} \quad \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \cdot X_{\text{GH}} Y = \frac{\mu_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp}^2 \frac{\lambda_1}{2\pi} Y$$

$$\boxed{\text{TM 波}} \quad \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \cdot X_{\text{GH}} Y = \frac{\varepsilon_{12} \sin \theta \cos^2 \theta}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel}^2 \frac{\lambda_1}{2\pi} Y$$

となり、これを解いて

$$\boxed{\text{TE 波}} \quad X_{\text{GH}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\mu_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \frac{\mu_{12} \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}} \lambda_1 \quad (122)$$

$$\boxed{\text{TM 波}} \quad X_{\text{GH}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\varepsilon_{12}^2 \cos^2 \theta + (\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12})} \frac{\varepsilon_{12} \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_{12} \mu_{12}}} \lambda_1 \quad (123)$$

を得る。

(122) (123) 式が結論である。